



Уральский
федеральный
университет

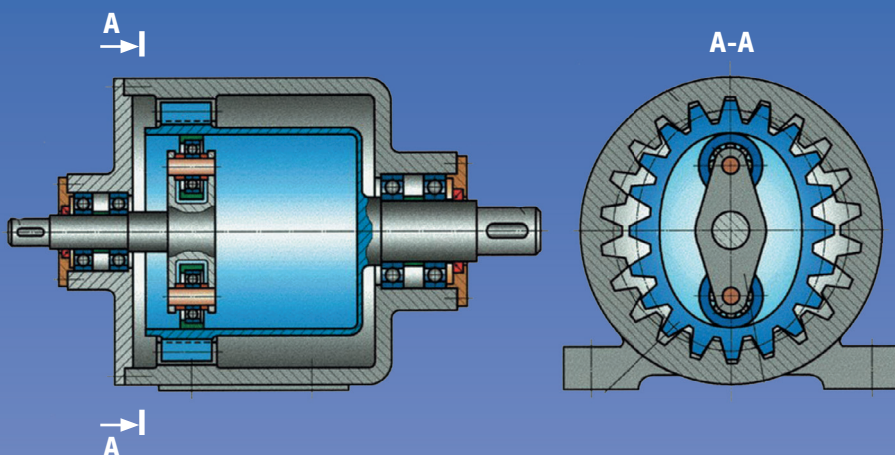
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Механико-
машиностроительный
институт

**В. М. ЗИОМКОВСКИЙ
И. В. ТРОИЦКИЙ**

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. М. Зиомковский
И. В. Троицкий

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов квалификации бакалавр
специальностей 210100.62 — Электроника и наноэлектроника,
220700.62 — Автоматизация технологических процессов и производств,
220000.62 — Мехатроника и робототехника,
261700.62 — Технология полиграфического и упаковочного производства,
640100.62 — Химическая технология,
240700.62 — Биотехнология

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 531.8

ББК 30.12

3-63

Рецензенты:

завкафедрой «Подъемно-транспортное оборудование» Российского государственного профессионально-педагогического университета, д-р техн. наук, профессор В. В. Каржавин;

проф. кафедры индустриального дизайна, канд. техн. наук Э. А. Бубнов (Уральская государственная архитектурно-художественная академия).

Научный редактор — доц., канд. техн. наук В. И. Вешкурцев

Зиомковский, В. М.

3-63 Прикладная механика : учебное пособие / В. М. Зиомковский, И. В. Троцкий. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 288 с.

ISBN 978-5-7996-1501-7

Учебное пособие включает разделы «Основы теоретической механики», «Строение механизмов», «Основы расчета элементов конструкций на прочность и жесткость» и «Основы проектирования деталей и узлов машин». В первом разделе рассмотрены вопросы статики, кинематики и динамики, во втором — структуры плоских рычажных механизмов, третий раздел посвящен определению напряжений и деформаций деталей при различных видах простых и сложных деформаций, в четвертом разделе рассмотрены вопросы конструирования и расчета деталей и узлов машин общего назначения. Большинство разделов сопровождается примерами решения задач и содержит необходимый справочный материал.

Учебное пособие может быть использовано для изучения теоретического материала, а также при выполнении контрольных, расчетно-графических и курсовых работ, предусмотренных рабочими программами дисциплины.

Содержание учебного пособия соответствует программам обучения и требованиям государственных образовательных стандартов.

Библиогр.: 11 назв. Рис. 225. Табл. 22.

УДК 531.8

ББК 30.12

ISBN 978-5-7996-1501-7

© Уральский федеральный
университет, 2015

Оглавление

Глава 1. Основы теоретической механики	7
1.1. Статика (равновесие тела под действием системы сил)	8
1.1.1. Основные понятия и задачи статики	8
1.1.2. Аксиомы статики	9
1.1.3. Связи и их реакции	11
1.1.4. Система сходящихся сил	13
1.1.5. Решение задач статики	18
1.1.6. Момент силы относительно центра	20
1.1.7. Момент силы относительно оси	21
1.1.8. Пара сил. Момент пары	23
1.1.9. Приведение системы сил к центру	25
1.1.10. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил	27
1.1.11. Плоская система сил	28
1.1.12. Решение задач	32
1.1.13. Равновесие системы тел	34
1.1.14. Равновесие при наличии трения скольжения	36
1.2. Кинематика	40
1.2.1. Основные понятия, определения и задачи кинематики	40
1.2.2. Способы задания движения точки	41
1.2.3. Вектор скорости точки	44
1.2.4. Вектор ускорения точки	45
1.2.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения	46
1.2.6. Нахождение скорости при естественном способе задания движения	47
1.2.7. Нахождение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорения	48
1.2.8. Поступательное и вращательное движение	52
1.2.9. Скорости точек тела при вращательном движении	55
1.2.10. Ускорения точек вращающегося тела	56
1.2.11. Плоскопараллельное движение твердого тела	56
1.2.12. Скорости точек плоской фигуры	58

1.2.13. Ускорение точек плоской фигуры	59
1.2.14. Примеры решения задач по кинематике	59
1.3. Динамика.....	62
1.3.1. Законы динамики	63
1.3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	65
1.3.3. Две основные задачи динамики	67
1.3.4. Работа силы, мощность	72
1.3.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки	74
1.3.6. Момент инерции тела относительно оси	76
1.3.7. Принцип Даламбера	78
1.3.8. Частные случаи приведения сил инерции	79

Глава 2. Основы расчетов элементов конструкций

на прочность и жесткость	83
2.1. Задачи и методы расчета	83
2.2. Допущения, принимаемые при расчетах на прочность	84
2.3. Классификация внешних нагрузок	85
2.4. Основные виды деформаций	86
2.5. Метод сечений. Напряжение	87
2.6. Осевое растяжение и сжатие прямолинейного стержня	91
2.6.1. Построение эпюр продольных сил	91
2.6.2. Определение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня	93
2.6.3. Определение деформаций	94
2.6.4. Статически неопределимые задачи при осевом растяжении или сжатии	96
2.7. Механические испытания свойств материалов	97
2.7.1. Диаграмма растяжения	97
2.7.2. Твердость	101
2.7.3. Определение допускаемых напряжений и коэффициента запаса прочности	102
2.8. Сложное напряженное состояние	105
2.8.1. Напряжения в наклонных площадках при осевом растяжении или сжатии	105
2.8.2. Напряжения на взаимно-перпендикулярных площадках	106
2.8.3. Определение напряжений в наклонных сечениях при растяжении или сжатии по двум взаимно- перпендикулярным направлениям	107
2.8.4. Обобщенный закон Гука	108

2.9. Геометрические характеристики плоских сечений	109
2.9.1. Статические моменты плоских сечений.....	109
2.9.2. Моменты инерции плоских сечений	111
2.9.3. Моменты инерции простых плоских сечений	112
2.9.4. Центробежный момент инерции	114
2.9.5. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная	115
2.10. Сдвиг и кручение.....	117
2.10.1. Определение напряжений и деформаций при сдвиге	117
2.10.2. Определение внутренних силовых факторов при кручении	119
2.10.3. Определение касательных напряжений и деформаций при кручении стержня круглого сечения	123
2.11. Плоский поперечный изгиб прямого бруса.....	132
2.11.1. Общие понятия о деформации изгиба	132
2.11.2. Опоры и опорные реакции балок.....	133
2.11.3. Определение опорных реакций.....	134
2.11.4. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении...	137
2.11.5. Зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.....	140
2.11.6. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	142
2.11.7. Определение нормальных напряжений при изгибе	146
2.11.8. Условие прочности по нормальным напряжениям	151
2.12. Сложное сопротивление	153
2.12.1. Совместное действие изгиба с кручением	153
2.12.2. Сочетание изгиба с растяжением или сжатием	158
Глава 3. Структура механизмов	160
3.1. Основные понятия и определения	161
3.2. Классификация кинематических пар	163
3.3. Кинематическая цепь. Механизм	165
3.4. Кинематические соединения	168
3.5. Плоские механизмы.....	168
3.6. Классификация плоских механизмов.....	169
3.7. Последовательность структурного анализа механизма.....	172

Глава 4. Основы проектирования деталей и узлов машин	174
4.1. Этапы проектирования изделия.....	176
4.2. Основные требования к машинам	176
4.2.1. Основные критерии работоспособности и расчета деталей машин.....	178
4.2.2. Машиностроительные материалы и термическая обработка.....	182
4.3. Механические передачи	185
4.3.1. зубчатые передачи.....	188
4.3.2. Цилиндрические зубчатые передачи	190
4.4. Ременные передачи.....	214
4.4.1. Расчет плоскоременной передачи	219
4.4.2. Клиноременная передача.....	230
4.4.3. Нагрузка на валы и опоры.....	231
4.5. Цепные передачи	232
4.5.1. Приводные цепи.....	233
4.5.2. Звездочки	236
4.5.3. Передаточное число цепной передачи	238
4.5.4. Основные геометрические соотношения в цепных передачах	238
4.5.5. Силы в цепной передаче	239
4.5.6. Расчет передачи роликовой цепью	240
4.5.7. Натяжение и смазывание цепи. КПД цепных передач ..	241
4.5.8. Рекомендации по конструированию цепных передач....	242
4.6. Валы и оси	243
4.6.1. Расчет валов	245
4.7. Опоры валов	251
4.7.1. Подшипники скольжения.....	251
4.7.2. Подшипники качения	255
4.8. Соединения деталей машин	262
4.8.1. Резьбовые соединения.....	263
4.8.2. Сварные соединения	268
4.8.3. Шпоночные соединения.....	271
4.8.4. Муфты.....	273
4.9. Точность изготовления деталей	276
4.9.1. Взаимозаменяемость	276
4.10. Шероховатость поверхности	283
Список литературы.....	286

Глава 1.

Основы теоретической механики

Современная механика ставит перед инженером множество задач, связанных с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называется происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.

Под механическим взаимодействием понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел. За основную **меру этих взаимодействий** принимают величину, называемую **силой**.

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется механикой.

Теоретическая механика рассматривает общие понятия и законы, на которые опираются все остальные разделы механики, такие как сопротивление материалов, теория механизмов и машин и т. д.

В основе механики лежат законы классической механики (законы Ньютона), которые установлены путем обобщения результатов опытов и наблюдений.

Теоретическая механика является научной базой очень многих областей науки и техники.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику.

Статика рассматривает учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил.

Кинематика рассматривает общие геометрические свойства движения тел.

Динамика изучает движение материальных тел под действием сил.

1.1. Статика (равновесие тела под действием системы сил)

1.1.1. Основные понятия и задачи статики

Статика изучает силы и условия равновесия материальных тел под действием сил.

Под равновесием будем понимать состояние покоя или равномерного движения по отношению к другим телам, например, земле. В общем курсе рассматриваются **абсолютно твердые тела**.

Абсолютно твердое тело — это тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным.

Состояние равновесия или движения тела зависит от **характера его механического взаимодействия** с другими телами.

Величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике **силой**.

Сила — величина векторная, т. е. определяется не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Действие силы на тело определяется тремя параметрами:

- числовым значением или модулем;
- направлением;
- точкой приложения.

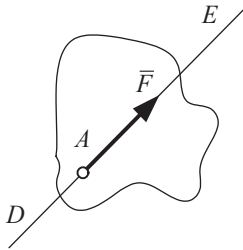


Рис. 1.1

Силу, как и другие векторы, будем обозначать буквой с чертой — \vec{F} , а модуль — буквой (F) . Графически сила изображается направленным отрезком (рис. 1.1). Длина отрезка в масштабе выражает модуль силы, направление отрезка показывает направление силы, точка A является точкой приложения силы, прямая ED — линия действия силы.

Дадим следующие определения:

1. **Система сил** — совокупность сил, действующих на тело. Если линии действия лежат в одной плоскости, то система сил **плоская**. Если в разных плоскостях, то **пространственная**.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются **сходящимися**.

Силы, линии действия которых параллельны друг другу, называются **параллельными**.

2. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение, называется **свободным**.

Если одну систему сил можно заменить другой, не изменяя при этом состояние покоя или движения, в котором находилось тело, то такие системы сил называются **эквивалентными**.

Система сил, под действием которой свободное тело может находиться в покое, называется **уравновешенной**.

Если система сил эквивалентна одной силе, то это сила **равнодействующая**. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется **уравновешивающей**.

Силы, действующие на данное тело или систему тел, можно разделить на **внешние и внутренние**:

- Внешние силы действуют на тело со стороны других тел.
- Внутренние — это силы, с которыми части данного тела или системы действуют друг на друга.

3. Силы, действующие в одной точке, называются **сосредоточенными**.

Силы, действующие на все точки объема, поверхности или длины, называются **распределенными**.

Задачи статики:

- преобразование системы сил, действующих на твердое тело, в эквивалентную систему, в частности, приведение системы сил к простейшему виду;
- определение условий равновесия системы сил, действующих на твердое тело.

1.1.2. Аксиомы статики

Изучение статики базируется на ряде **аксиом**, которые являются следствием основных законов механики.

1. Если на свободное твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

2. Действие данной системы на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

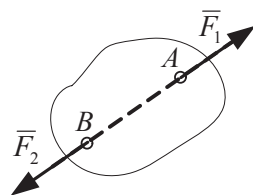


Рис. 1.2

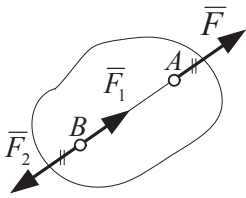


Рис. 1.3

Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии ее действия в любую другую точку (рис. 1.3).

$$F \sim F_1, \text{ т. к. } (F, F_2) \sim 0;$$

$$F = F_1 = F_2.$$

3. Закон параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4). Вектор \bar{R} называется геометрической суммой векторов \bar{F}_1, \bar{F}_2 :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

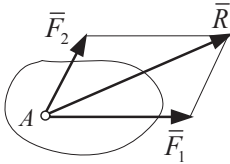


Рис. 1.4

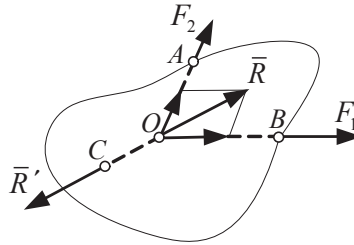


Рис. 1.5

Следствие аксиомы 3: всякую силу можно заменить эквивалентной системой сил, приложенных в одной точке с заданной силой.

Теорема. Свободное твердое тело может находиться в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости (рис. 1.5), только тогда, когда линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Это теорема о трех силах:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \bar{R} + \bar{R}' = 0.$$

4. Закон равенства действия и противодействия. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны (см. рис. 1.6).

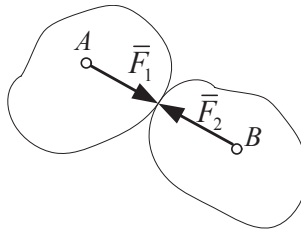


Рис. 1.6

Силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 приложены к разным телам, поэтому не образуют уравновешенную систему сил.

Свойство внутренних сил. Две любые части тела действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами.

В абсолютно твердых телах все внутренние силы образуют уравновешенную систему сил, которую при изучении равновесия тела можно отбросить и рассматривать только внешние силы.

5. Если **нетвердое** тело находится в равновесии под действием системы сил, то его равновесие не нарушится, если тело станет **абсолютно твердым**.

1.1.3. Связи и их реакции

Свободное тело может из данного положения совершать любое перемещение в пространстве.

Тело, перемещению которого в пространстве препятствуют другие, скрепленные с ним тела, называется **несвободным**.

Все, что ограничивает передвижение тела в пространстве, называют **связью**. В дальнейшем **связями** будем называть **тела**, ограничивающие перемещение данного тела.

Силы, с которыми связи действуют на тело, называются **реакциями связей**. При решении задач статики необходимо **правильно направлять** реакции связей. Разберем основные виды связей и их реакции.

Гладкая поверхность (без учета сил трения). Реакция направлена по нормали к этой поверхности, т. е. перпендикулярно общей касательной (см. рис. 1.7).

Опорная точка (ребро). Реакция перпендикулярна опирающейся поверхности (см. рис. 1.8).

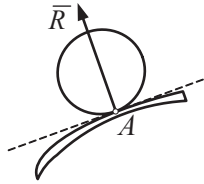


Рис. 1.7

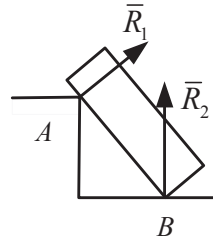


Рис. 1.8

Идеальная нить (гибкая, невесомая, нерастяжимая). Реакция направлена по нити к точке подвеса (рис. 1.9). Примеры: моделирует трос, канат, цепь, ремень.

Идеальный стержень (жесткий, невесомый, с шарнирами на концах). Реакция связи направлена вдоль стержня (рис. 1.10). В отличие от нити стержень может работать и на сжатие.

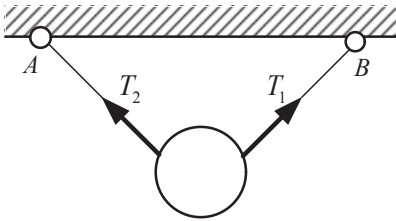


Рис. 1.9

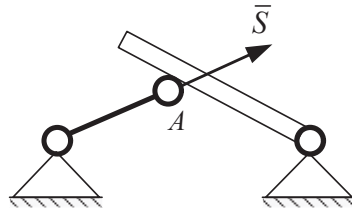


Рис. 1.10

Цилиндрический шарнир (подшипник). Тело может вращаться вокруг оси шарнира, но не может перемещаться в плоскости, перпендикулярной этой оси. Реакция лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, и проходит через нее (рис. 1.11). Положение этой реакции не определено, но для удобства ее принято задавать двумя взаимно перпендикулярными составляющими R_x, R_y [1, с. 6].

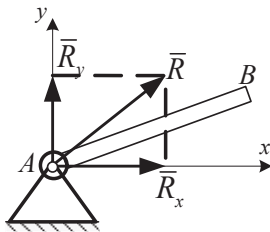


Рис. 1.11

Сферический шарнир (см. рис. 1.12, а) и **подпятник** (см. рис. 1.12, б). Такая связь не дает точке А перемещаться в пространстве. Реакция R может иметь любое направление в пространстве. Удобно ее представлять тремя взаимно перпендикулярными составляющими.

Жесткая заделка. Эта связь препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления (см. рис. 1.13). Имеем распределенную

систему сил реакции, которая может быть заменена одной силой \bar{R} и реактивным моментом m_A .

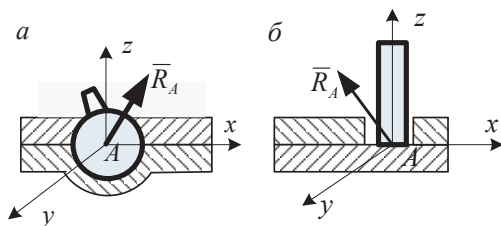


Рис. 1.12

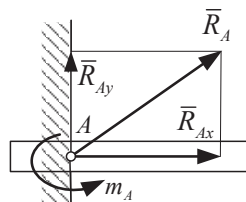


Рис. 1.13

В статике при решении задач на равновесие тела почти всегда это тело является несвободным.

Рассмотрение равновесия несвободного тела основывается на **принципе освобождения от связей**: *Не изменяя равновесия тела, можно отбросить связи, наложенные на него, и взамен их приложить к телу реакции связей. Тогда система активных сил и реакций связей будет удовлетворять условиям равновесия свободного тела.*

1.1.4. Система сходящихся сил

Сложение сил

Для решения задач статики необходимо уметь складывать и разлагать силы на составляющие. *Геометрическая сумма сил какой-либо системы называется главным вектором этой системы сил.*

- **Сложение двух сил.** Геометрическая сумма сил $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ находится по правилу параллелограмма (рис. 1.14, а) или построением силового треугольника (рис. 1.14, б).

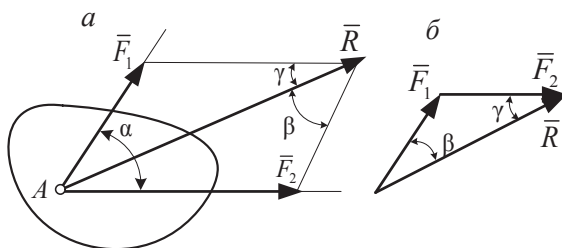


Рис. 1.14

Угол между силами — α . Модуль R и углы β и γ найдем, используя теорему косинусов и синусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha};$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

• **Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости.** Геометрическая сумма трех сил, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (рис. 1.15). Доказательство: сложим вначале \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , а затем к $F_{1,2}$ прибавим \vec{F}_3 .

• **Сложение системы сил.** Главный вектор любой системы сил определяется построением силового многоугольника (рис. 1.16). \vec{R} — замыкающая силового многоугольника.

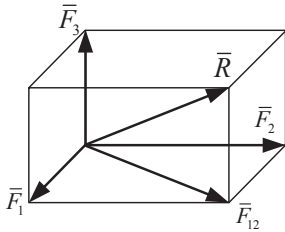


Рис. 1.15

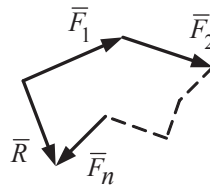


Рис. 1.16

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n;$$

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Равнодействующая сходящейся системы сил

Система сходящихся сил (см. рис. 1.17, а) эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (см. рис. 1.17, б). Последовательно применяя правило параллелограмма, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную главному вектору (геометрической сумме) этих сил и приложенную в точке пересечения линий их действия.

Следовательно, система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ имеет равнодействующую, равную их главному вектору \vec{R} и приложенную в точке O или в любой другой точке на линии действия силы \vec{R} , проведенной через точку O (см. рис. 1.17, б).

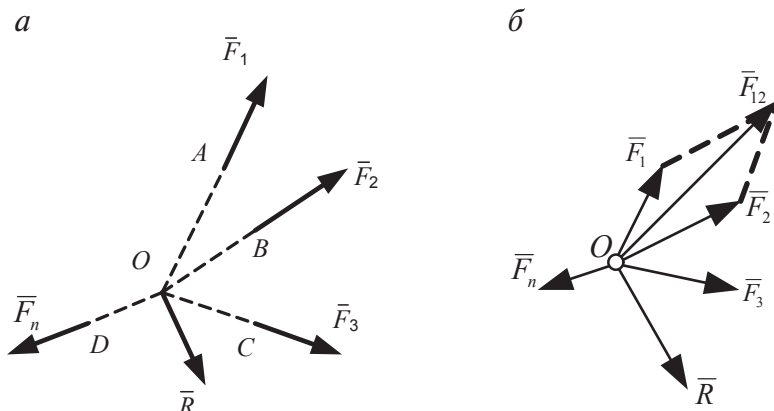


Рис. 1.17

Разложение сил

Разложить силу на несколько составляющих, значит, найти такую систему нескольких сил, для которых эта сила будет равнодействующей.

Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение при задании дополнительных условий. Рассмотрим два частных случая:

- разложить силу по двум заданным направлениям. Задача сводится к построению параллелограмма, у которого заданная сила является диагональю, а стороны параллельны выбранным направлениям;
- разложить силу по трем заданным направлениям. Задача сводится к построению параллелепипеда, для которого сила будет диагональю.

Способ разложения сил мы будем использовать при определении реакций связей из условия равновесия сил.

Проекция силы на ось и на плоскость

Аналитический метод решения задач статики основывается на понятии проекции силы на ось.

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (см. рис. 1.18).

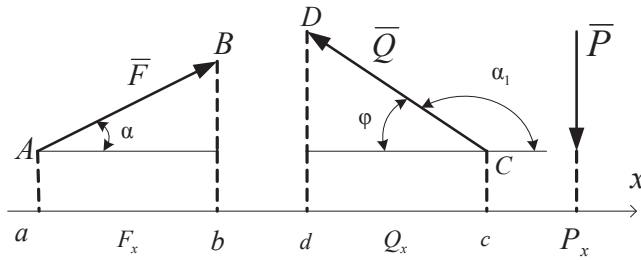


Рис. 1.18

$$F_x = F \cos \alpha = ab;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi = -dc;$$

$$P_x = 0.$$

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость (рис. 1.19).

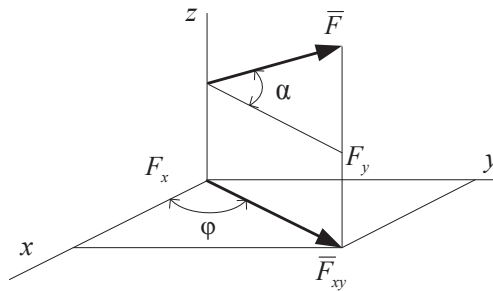


Рис. 1.19

По модулю $F_{xy} = F \cos \alpha$, где α — угол между силой \vec{F} и ее проекцией на плоскость O_{xy} . Иногда для нахождения проекции силы на ось удобно найти ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем эту проекцию спроектировать на ось.

Аналитический способ задания сил

Для аналитического задания силы выбираем правую систему координат O_{xyz} , относительно которой будем определять направление силы в пространстве. Вектор \vec{F} можно построить, если известен модуль \vec{F} и углы α , β и γ (см. рис. 1.20).

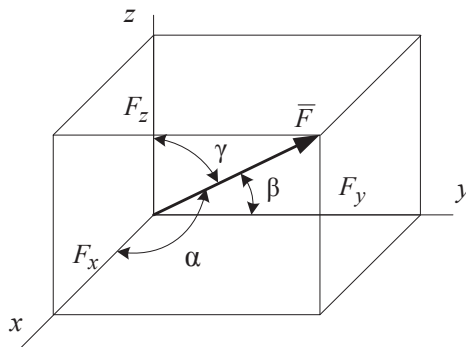


Рис. 1.20

Для аналитического решения задач механики удобнее задавать силу ее проекциями F_x , F_y и F_z на координатные оси. Если проекции известны, то:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Если сила расположена в одной плоскости, ее можно задать двумя проекциями и тогда:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}.$$

Аналитический способ сложения сил

Этот способ основывается на теореме из геометрии: проекция вектора суммы на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Из теоремы следует, что если \bar{R} есть сумма сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, т.е. $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$, то $R_x = \sum F_{kx}; R_y = \sum F_{ky}; R_z = \sum F_{kz}$.

Определив R_x , R_y и R_z , можно вычислить R , $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (1.1)$$

Для сил, расположенных в одной плоскости:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}. \quad (1.2)$$

Если силы заданы их модулями и углами с осями, то для применения аналитического метода сложения сил нужно предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

Равновесие системы сходящихся сил

Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а следовательно, и главный вектор этой системы были равны нулю.

Это условие можно представить в геометрической и аналитической формах.

• **Геометрическое условие равновесия.** Поскольку главный вектор \bar{R} системы сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного на этих силах, то для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

Аналитические условия равновесия. Модуль главного вектора системы $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ обратится в нуль только тогда, когда $R_x = 0$; $R_y = 0$; $R_z = 0$. Учитывая выражение (1.1), $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum F_{kz} = 0$, *т. е. для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.*

Для плоской системы сходящихся сил имеем два условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0.$$

1.1.5. Решение задач статики

Задачи могут быть двух типов:

- известны полностью или частично действующие на тело силы. Требуется определить, в каком положении, или при каких соот-

ношениях между действующими силами тело находится в равновесии:

- известно, что тело находится в равновесии. Определить, чему равны все или некоторые силы, действующие на тело.

Отметим, что в задачах статики реакции связей являются заведомо неизвестными.

Процесс решения сводится к следующим операциям:

- выбор тела, равновесие которого должно быть рассмотрено;
- изображение всех действующих на тело сил, известных и неизвестных, в том числе реакций связей;
- составление уравнений равновесия;
- определение искомых величин.

При решении можно использовать геометрический и аналитический методы.

Геометрическим методом удобно пользоваться, когда общее число сил, действующих на тело, равно трем. Силовой треугольник должен быть замкнут. Решая треугольник, находим силы.

Аналитическим методом можно пользоваться при любом числе действующих сил. Для плоской системы сходящихся сил будет два уравнения, для пространственной — три.

При аналитическом методе вначале нужно выбрать направление осей. Задача будет решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно неизвестной силе.

Задача. Шар весом $G = 100 \text{ Н}$ лежит на гладкой доске AB , касаясь ее в точке E , и опирается точкой C на вертикальную стену (рис. 1.21, a). Доска удерживается в равновесии шарниром A и веревкой BK . Определить давление шара на стену и доску. Угол $\alpha = 30^\circ$.

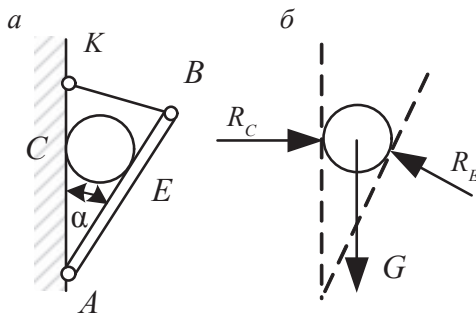


Рис. 1.21

Решение. Рассмотрим равновесие шара. Реакции стены и доски \bar{R}_C и \bar{R}_E равны давлению шара на стену и доску, но направлены в противоположную сторону. Связь — гладкая поверхность (см. рис. 1.21, б).

• **Геометрический способ.** Строим замкнутый силовой треугольник (рис. 1.22).

$$R_C = G \operatorname{ctg} \alpha = 100 \operatorname{ctg} 30^\circ = 173 \text{ Н};$$

$$R_E = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{100}{\sin 30^\circ} = 200 \text{ Н}.$$

• **Аналитический способ.** Выберем ось $O_y \perp R_C$ (рис. 1.23). Составляем два уравнения равновесия сходящихся сил.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & R_C - R_E \cos \alpha &= 0 \\ \sum F_{ky} &= 0; & -G + R_E \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$R_E = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{100}{\sin 30^\circ} = 200 \text{ Н};$$

$$R_C = R_E \cos \alpha = G \operatorname{ctg} \alpha = 173 \text{ Н}.$$

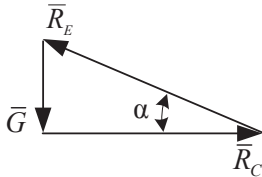


Рис. 1.22

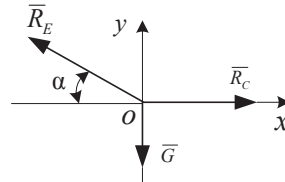


Рис. 1.23

1.1.6. Момент силы относительно центра

Если под действием приложенной силы тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент этой силы относительно точки будет характеризовать вращательный эффект этой силы. Сила \bar{F} приложена в точке A . Опустим из точки O перпендикуляр на линию действия сил (см. рис. 1.24).

Расстояние h называется плечом силы относительно центра O . Момент силы относительно центра O определяется:

- модулем момента $F \cdot h$;
- положением в пространстве плоскости поворота OAB ;
- направлением поворота в этой плоскости. Направление плоскости в пространстве определяется нормалью. Следовательно, момент силы относительно центра величина векторная.

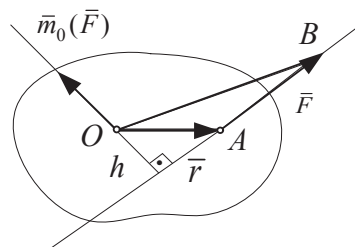


Рис. 1.24

Введем определение:

Моментом силы \vec{F} относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\vec{m}_0(\vec{F})$, модуль которого равен $F \cdot h$ и который направлен в ту сторону, откуда вращение видно против хода часовой стрелки.

Момент $\vec{m}_0(\vec{F})$ равен векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , проведенного из центра O в точку приложения силы A , на саму эту силу.

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F};$$

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = F \cdot h = |\vec{OA} \times \vec{F}|.$$

Отметим следующие свойства момента силы:

- момент силы не изменится, если силу перенести вдоль линии ее действия в другую точку тела;
- момент силы равен 0 или когда сила равна 0, или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо $h = 0$).

1.1.7. Момент силы относительно оси

Для характеристики вращательного действия силы на тело, закрепленное на оси, служит момент силы относительно оси.

Момент силы относительно оси есть алгебраическая величина, равная проекции вектора момента силы относительно произвольной точки оси на эту ось, $m_z(\vec{F}) = \text{pr}_z \vec{m}_0(\vec{F})$ (рис. 1.25).

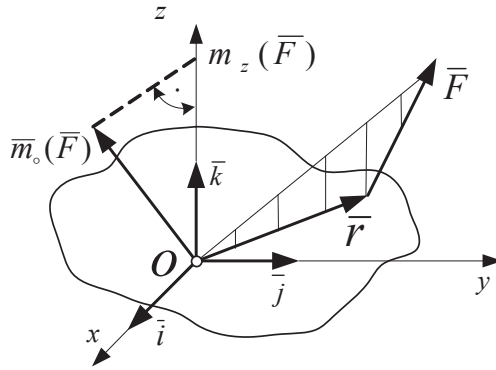


Рис. 1.25

Аналитический способ вычисления момента силы относительно оси

По правилу вычисления векторного произведения (рис. 1.25):

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k},$$

откуда вычисляем моменты силы \bar{F} относительно осей:

$$m_x(\bar{F}) = (yF_z - zF_y); \quad m_y = (zF_x - xF_z); \quad m_z = (xF_y - yF_x). \quad (1.3)$$

Геометрический способ вычисления момента силы относительно оси

1. Провести плоскость \perp данной оси OZ (рис. 1.26).

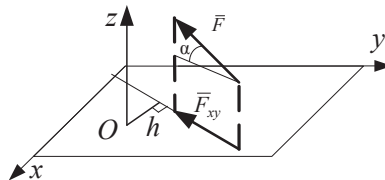


Рис. 1.26

2. Спроектировать силу на эту плоскость.

3. Вычислить момент проекции \bar{F}_{xy} относительно точки O — точки пересечения оси Z с плоскостью.

Момент положителен, если с положительного направления оси вращение происходит против хода часовой стрелки.

Момент силы относительно оси равен 0, если сила параллельна оси, либо линия действия силы пересекает эту ось.

При вычислении момента силы ее бывает удобно предварительно разложить на составляющие и находить момент каждой составляющей отдельно. При этом момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

1.1.8. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 1.27).

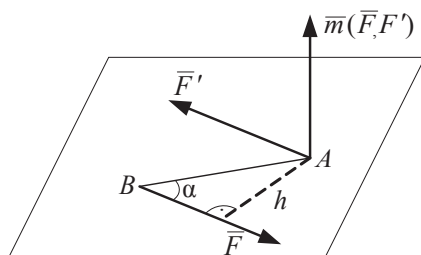


Рис. 1.27

Свойства пары сил как особой меры механического взаимодействия тел должны быть рассмотрены особо.

Плоскость, проходящая через линию действия пары сил, называется **плоскостью действия пары**.

Расстояние d между линиями действия пары сил называется **плечом пары**. Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой **моментом пары**.

Момент пары определяется:

- модулем $F \cdot d$;
- положением в пространстве плоскости действия пары;
- направлением поворота пары в этой плоскости.

Моментом пары сил \overline{m} называется **вектор**, модуль которого равен произведению одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.

Вектор момента пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

$$\begin{aligned}\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}') &= \overline{m}_A(\overline{F}) = \overline{m}_B(\overline{F}'); \\ |\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}')| &= |\overline{F}| AB \sin \alpha = |\overline{F}| \cdot h.\end{aligned}$$

Теорема. Момент пары равен сумме моментов относительно любого центра O сил, образующих пару:

$$\overline{m} = \overline{m}_0(\overline{F}) + \overline{m}_0(\overline{F}').$$

Докажем это. Из произвольного центра проведем радиус-векторы $\overline{r}_A = \overline{OA}$, $\overline{r}_B = \overline{OB}$ (рис. 1.28).

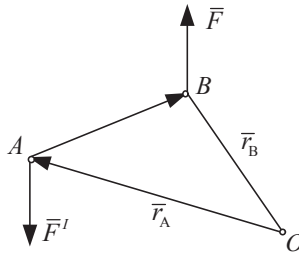


Рис. 1.28

$$\begin{aligned}\overline{m}_0(\overline{F}) &= \overline{r}_B \times \overline{F}; \quad \overline{m}_0(\overline{F}') = \overline{r}_A \times \overline{F}' = -\overline{r}_A \times \overline{F}, \text{ т. к. } F = -F'; \\ \overline{m}_0(\overline{F}) + \overline{m}_0(\overline{F}') &= (\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times \overline{F} = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}').\end{aligned}$$

Основные свойства пар (правила их эквивалентного преобразования) даются следующими тремя теоремами:

Теорема 1. Две пары сил, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если равны их алгебраические моменты, т. е. модули, взятые с определенным знаком.

Следствие. Пару сил можно перемещать в плоскости действия, изменяя величину плеча и сил, сохраняя ее момент.

Теорема 2. Пару сил можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия.

Следствие из теоремы 1 и 2. Две пары сил эквивалентны, если равны их векторные моменты.

Действительно, доказывая теорему о сумме моментов сил пары относительно центра, мы этот центр O выбираем произвольно. Вектор \bar{m} можно считать приложенным в любой точке, т. е. этот вектор свободный.

Теорема 3. Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар.

Из теоремы следует, что любую систему пар можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар. Следовательно, если на тело действует несколько пар с моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то их сумма эквивалентна одному моменту $\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i$.

Условие равновесия системы пар

Для равновесия системы пар, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар равнялась нулю.

Для пространственной системы пар: $\sum_{i=1}^n \bar{m}_i = 0$, для плоской: $\sum_{i=1}^n m_i = 0$.

1.1.9. Приведение системы сил к центру

Лемма Пуансо

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится (рис. 1.29).

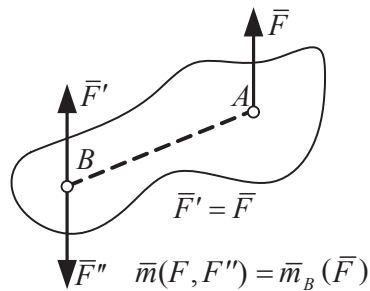


Рис. 1.29

Основная теорема статики (теорема Пуансо)

Произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно заменить **одной силой** \bar{R} , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O , и одной **парой с моментом** \bar{M}_0 , равным главному моменту системы сил относительно центра O .

Приведение системы сил к данному центру

На твердое тело действуют силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Перенесем все силы в выбранный центр O , добавляя при этом пары сил (рис. 1.30). Сходящиеся в центре O силы заменяем одной $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$, пары сил складываем и получим $\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$ (рис. 1.31).

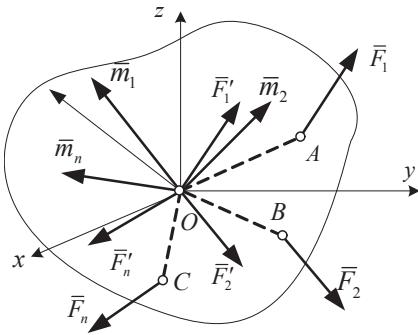


Рис. 1.30

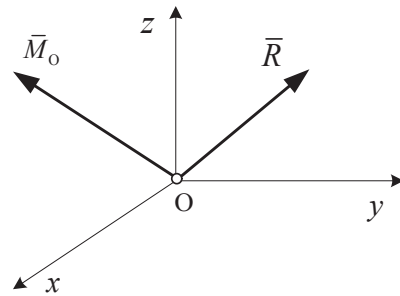


Рис. 1.31

\bar{R} — **геометрическая сумма сил системы**, называемая **главным вектором**.

\bar{M}_0 — **геометрическая сумма всех моментов** сил относительно центра O , называемая **главным моментом** системы сил относительно этого центра.

Значение \bar{R} от выбора центра не зависит. Значение \bar{M}_0 при изменении положения центра изменяется, поэтому всегда нужно указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

1.1.10. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

На основании основной теоремы статики сформулируем условия равновесия пространственной системы сил.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил \bar{R} и главный момент \bar{M}_O относительно любого центра были равны нулю

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_O = 0, \quad (1.4)$$

где O — любой центр, т. к. при $\bar{R} = 0$ значение \bar{M}_O от выбора центра не зависит.

Условия равновесия в аналитической форме

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на три координатные оси и сумма моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Условия равновесия системы параллельных сил

Для равновесия системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил, и сумма моментов всех сил относительно двух других осей равнялись нулю (рис. 1.32).

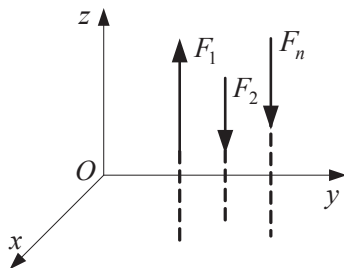


Рис. 1.32

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.6)$$

Теорема Вариньона

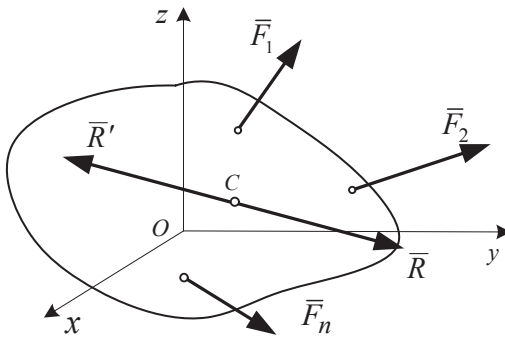


Рис. 1.33

Используя основную теорему статики, докажем теорему Вариньона о моменте равнодействующей. Если заданная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Пусть система сил приводится к равнодействующей \bar{R} , проходящей через точку C . Приложим в точке C уравнивающую $\bar{R}' = -\bar{R}$ (рис. 1.33).

Тогда система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$ должна находиться в равновесии и для нее выполняется условие $\bar{M}_0 = 0$, т. е.

$$\sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \bar{m}_0(\bar{R}') = 0; \quad \bar{m}_0(\bar{R}') = -\bar{m}_0(\bar{R}); \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = \bar{m}_0(\bar{R}). \quad (1.7)$$

Этой теоремой будем пользоваться при вычислении моментов сил.

1.1.11. Плоская система сил

Алгебраический момент силы

Алгебраическим моментом силы \bar{F} относительно центра O называется взятое с соответствующим знаком **произведение** модуля силы на ее плечо

$$\sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = \pm F \cdot h. \quad (1.8)$$

Когда все силы лежат в **одной плоскости**, то векторы моментов параллельны и различаются только **знаками**. В этом случае нет необходимости прибегать к векторной символике, а момент силы относительно любого центра O можно рассматривать как алгебраическую величину $m_0(\bar{F})$.

В правой системе координат, принятой в механике, момент считается положительным, когда стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки.

Задача. Найти моменты сил \bar{F} и \bar{Q} относительно точки D . $CD = a$, $AD = b$ (рис. 1.34).

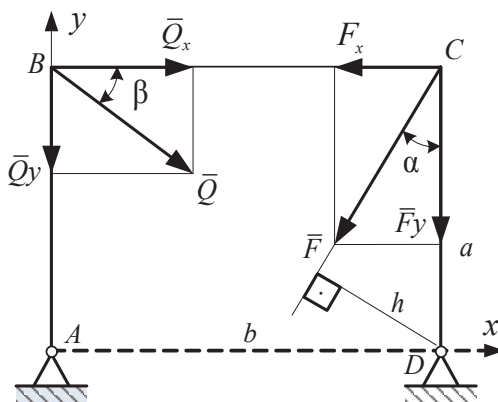


Рис. 1.34

Решение. Опустим из точки D перпендикуляр на линию действия силы \bar{F} .

$h = a \cdot \sin \alpha$, $m_D(\bar{F}) = F \cdot h = F \cdot a \cdot \sin \alpha$. Можно найти плечо силы \bar{Q} относительно точки D , но проще разложить силу Q по двум направлениям и воспользоваться теоремой Вариньона

$$Q_x = Q \cos \beta; \quad Q_y = Q \sin \beta;$$

$$m_D(\bar{Q}) = m_D(\bar{Q}_x) + m_D(\bar{Q}_y) = -Q_x a + Q_y b;$$

$$m_D(\bar{Q}) = Q \sin \beta \cdot b - Q \cos \beta \cdot a = Q(b \sin \beta - a \cos \beta).$$

Алгебраический момент пар

Если все пары сил лежат в одной плоскости, то момент пары можно рассматривать как алгебраическую величину.

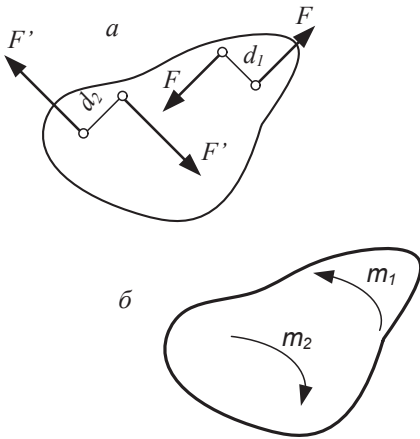


Рис. 1.35

Алгебраический момент пары равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (рис. 1.35, а), взятому с соответствующим знаком

$$m = \pm Fd; \quad m_1 = Fd_1; \quad m_2 = -Fd_2. \quad (1.9)$$

Пары можно суммировать, при этом сумма будет алгебраическая.

На схемах пару можно изображать в виде стрелок, указывающих направление поворота (рис. 1.35, б).

Задача. Рычаг находится в равновесии под действием двух параллельных сил \vec{P} и \vec{P}' (рис. 1.36). Определить силы давления на опоры.

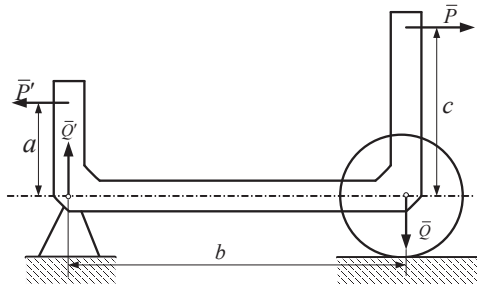


Рис. 1.36

Решение. Заменим пару \vec{P}, \vec{P}' эквивалентной парой, силы которой направлены по направлению опор. Эквивалентная пара оказывает то же механическое воздействие, что и рассматриваемая заданная. *Плечи и силы у них различны, но моменты равны:* $P(c-a) = Q \cdot b$; $Q = Q' = P \frac{c-a}{b}$.

Равновесие плоской системы сил

Для любой системы сил необходимыми и достаточными условиями равновесия являются $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$. Найдем отсюда **аналитические условия равновесия** плоской системы сил. Их можно получить в **трех различных формах**.

1. Основная форма условий равновесия. Поскольку вектор $\bar{R} = 0$, когда равны нулю его проекции, то условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_o(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.10)$$

где m_o — алгебраический момент; O — любая точка в плоскости.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Одновременно равенства (1.10) выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма всех моментов сил относительно двух любых центров A и B и сумма их проекций на ось O_x , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю.

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum F_{kx} = 0. \quad (1.11)$$

Если выполняются только два первых условия, то система может иметь равнодействующую, проходящую через точки A и B (рис. 1.37). Тело не будет находиться в равновесии, хотя $\sum m_A$, $\sum m_B$ будут равны нулю.

3. Уравнение трех моментов. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил системы относительно трех точек, не лежащих на одной прямой, была равна нулю

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.12)$$

Если бы система не находилась в равновесии, то она сводилась бы к равнодействующей, но тогда, чтобы не дать моментов, равнодей-

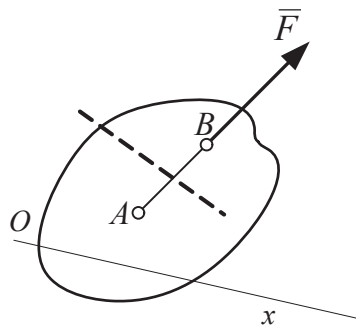


Рис. 1.37

ствующая R должна одновременно пройти через три точки, не лежащие на одной прямой, что невозможно.

Отметим следующее. Если на тело действуют плоская система сил и пары, лежащие в той же плоскости, то при составлении условий равновесия силы пар не войдут в уравнения проекций на оси. В уравнения моментов войдут и моменты от сил относительно центра, и моменты пар.

Следовательно, уравнения (1.10) запишутся в виде:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_0(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0. \quad (1.13)$$

Равновесие плоской системы параллельных сил

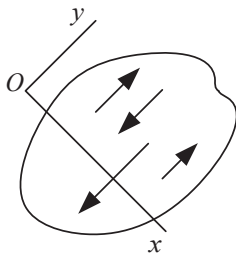


Рис. 1.38

Если все силы параллельны, то ось O_x можно направить перпендикулярно силам (рис. 1.38) и равенство $\sum F_{kx} = 0$ превратится в тождество.

Остается два уравнения равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.14)$$

1.1.12. Решение задач

Для получения более простых уравнений следует соблюдать следующие условия:

- составляя уравнения проекций, проводить координатную ось перпендикулярно неизвестной силе;
- составляя уравнение моментов, брать центр моментов в точке, где пересекается большее число неизвестных сил;
- при вычислении моментов использовать теорему Вариньона.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы, валы на подшипниках и т. д. В технике обычно встречаются следующие три типа опорных закреплений:

1. Неподвижная шарнирная опора (рис. 1.39, а). Реакция проходит через центр шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач реакцию раскладывают на две составляющие по двум взаимно-перпендикулярным осям.

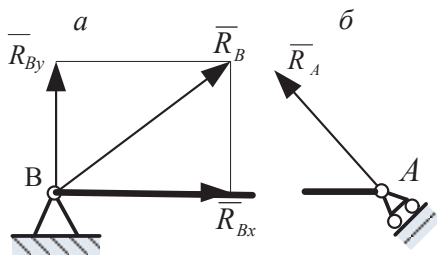


Рис. 1.39

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2}.$$

2. Подвижная шарнирная опора (рис. 1.39, б). Реакция R_A направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры.

3. Жесткая заделка (рис. 1.40). Балка заделана в стену. На ее конец действует распределенная система сил, которая приводится к силе, приложенной в точке A, и паре с неизвестным моментом m_A . Силу R_A раскладываем на две составляющие. Таким образом, при составлении уравнений равновесия для определения реакций имеем:

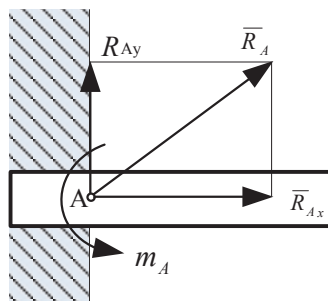


Рис. 1.40

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum m_A(\vec{F}_k) = 0.$$

При составлении расчетной схемы конструкции необходимо опирать балку на две опоры: шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную, либо предусмотреть конструкцию с жесткой заделкой. Такой способ закрепления исключает появление дополнительных усилий и напряжений от температуры, изменения длины или изгиба.

Задача. Определить реакции опор балки, нагруженной силой F и моментом M (см. рис. 1.41).

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; -F_y \cdot a + R_B \cdot 2a - M = 0; R_B = \frac{M + F_y \cdot a}{2a};$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_{Ay} + R_B - F_y = 0; R_{Ay} = F_y - R_B;$$

$$\sum F_{kx} = 0; R_{Ax} - F_x = 0; R_{Ax} = F_x;$$

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha; \quad R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}.$$

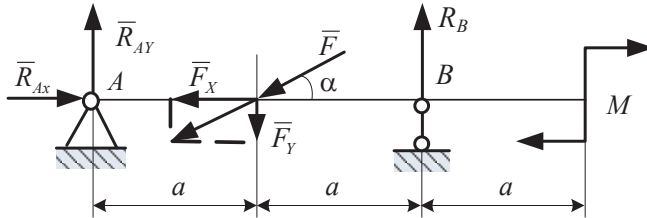


Рис. 1.41

1.1.13. Равновесие системы тел

Во многих инженерных задачах приходится рассматривать равновесные **системы**, состоящие из **нескольких взаимодействующих тел**. Эти твердые тела соединяются шарнирами, стержнями и т. д. или просто опираются друг на друга. Если вся система находится в равновесии, то и каждое тело, входящее в нее, тоже находится в равновесии. Поэтому в этих задачах рассматривают равновесие каждого тела в отдельности. При этом учитывают и те силы, с которыми тела действуют друг на друга. На основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия эти силы взаимодействия тел равны по модулю и противоположно направлены. **Силы**, с которыми действуют **друг на друга** тела, входящие в систему, называются **внутренними** силами, а силы, с которыми действуют на тела системы другие тела, не входящие в систему, называются **внешними**.

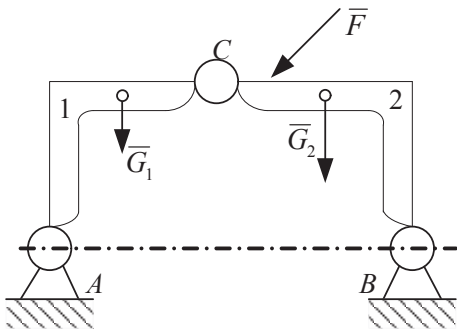


Рис. 1.42

Рассмотрим в качестве примера трехшарнирную арку, состоящую из двух полуарок весом G_1 и G_2 , соединенных шарниром C , нагруженную силой F и укрепленную на шарнирно-неподвижных опорах A и B (рис. 1.42).

Определим реакции шарниров A , B и C . Реакции шарниров не известны ни по величине, ни по направ-

лению, поэтому будем определять их составляющие $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$. Всего в задаче 6 неизвестных, значит, нужно составить 6 уравнений равновесия.

Рассмотрим **равновесие каждой полуарки** (рис. 1.43, а, б). C_x и C_y — действие полуарки 2 на полуарку 1. C'_x и C'_y — действие полуарки 1 на полуарку 2. C_y и C'_y, C_x и C'_x равны по величине и противоположны по направлению.

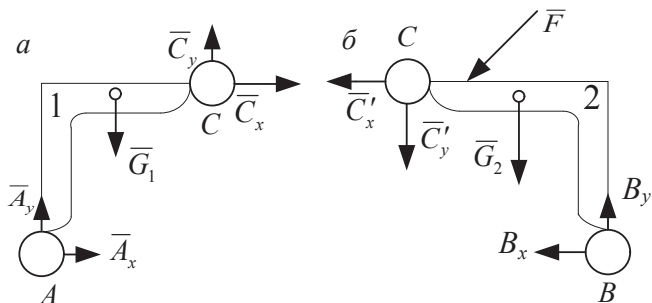


Рис. 1.43

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 & \text{ — для полуарки 1;} \\ \sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0 & \text{ — для полуарки 2.} \end{aligned}$$

Получили 6 уравнений с 6 неизвестными. Задача **статически определимая**.

При решении задач на равновесие системы тел можно применить **аксиому отвердевания** и рассмотреть равновесие всей системы в целом как **одного твердого тела**. В примере можно рассмотреть равновесие всей системы (см. рис. 1.42) — 3 уравнения, а затем равновесие одной из полуарок (рис. 1.43) — 3 уравнения, всего 6 уравнений.

Отметим, что в уравнения равновесия всей системы тел **внутренние силы не входят**, т. к. образуют уравновешенную систему сил.

Для всей системы (см. рис. 1.42):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0 \\ \sum F_{ky} &= 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \text{или} \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0$$

Для одной из полуарок (см. рис. 1.43):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0 \\ \sum F_{ky} &= 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0$$

1.1.14. Равновесие при наличии трения скольжения

Если некоторые силы стремятся сдвинуть твердое тело по поверхности неподвижного другого тела, то в плоскости контакта тел возникает сила сцепления, направленная в сторону, противоположную той, куда силы стремятся сдвинуть данное тело. Величина этой силы может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, достигаемого в момент перехода тела из состояния покоя в движение. Силу сцепления называют силой трения скольжения при покое или силой статического трения.

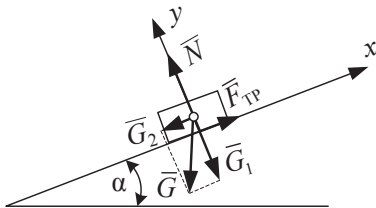


Рис. 1.44

Введем понятие угла трения и коэффициента трения скольжения.

Поместим ползун весом G на наклонную шероховатую плоскость с углом наклона α к горизонту. Со стороны плоскости на тело будет действовать сила нормального давления N и сила трения $F_{\text{тр}}$, которая препятствует перемещению вниз по наклонной плоскости (рис. 1.44). Разложим силу веса по направлению координатных осей. Из условия равновесия сил, приложенных к ползуну:

$$F_{\text{тр}} = G_2 = G \sin \alpha; \quad (1.15)$$

$$N = G_1 = G \cos \alpha. \quad (1.16)$$

Поделим выражение (1.15) на (1.16):

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Экспериментально установлено, что ползун будет находиться в покое при $\alpha \leq \varphi$. Следовательно, ползун находится в равновесии при $\frac{F_{\text{тр}}}{N} \leq \text{tg } \varphi$. Обозначим $\text{tg } \varphi$ через f . Тогда:

$$F_{\text{тр}} \leq fN. \quad (1.17)$$

Величины φ и f называются углом и коэффициентом трения покоя, а формула (1.17) выражает закон Амонтона-Кулона. Таким образом, сила статического трения меньше или равна произведению коэффициента трения на нормальное давление и не зависит от площади контакта. При угле наклона плоскости $\alpha = \varphi$ ползун будет перемещаться с постоянной скоростью, силы, действующие на него, будут уравновешены, а сила трения $F_{\text{тр}} = fN$.

Трение скольжения в поступательной паре

Рассмотрим плоский ползун на горизонтальной плоскости, на который действует сила под углом α к нормали (рис. 1.45). Со стороны плоскости на ползун будут действовать еще две силы: нормального давления N и трения $F_{\text{тр}}$. Перенесем силу P в точку A и разложим ее на две составляющие P_1 и P_2 .

Определим, при каком угле α ползун находится в покое, движется с постоянной скоростью и движется с ускорением.

Сила нормального давления $N = P_2 = P \cos \alpha$. Сила, стремящаяся переместить ползун, $P_1 = P \sin \alpha$, сила трения, удерживающая ползун, $F_{\text{тр}} = fN$ или $F_{\text{тр}} = fP \cos \alpha$. Ползун находится в покое при условии $F_{\text{тр}} > P_1$ или $fP \cos \alpha > P \sin \alpha$, откуда $f > \text{tg } \alpha$. Так как $f = \text{tg } \varphi$, то окончательно имеем $\varphi > \alpha$. Следовательно, ползун будет находиться в покое, если сила P приложена к нему под углом α к нормали поверхности трения меньшим, чем угол трения. В случае, когда $F_{\text{тр}} = P_1$, ползун будет двигаться с постоянной скоростью. Этому соответствует условие $\varphi = \alpha$. И, наконец, ползун будет перемещаться ускоренно при $F_{\text{тр}} < P_1$, т.е. при $\varphi < \alpha$.

Если данную задачу рассмотреть во всех возможных плоскостях, то в предельном положении, когда $\varphi = \alpha$, сила P опишет ко-

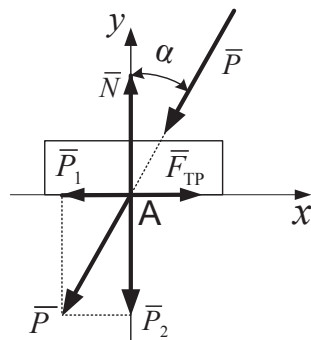


Рис. 1.45

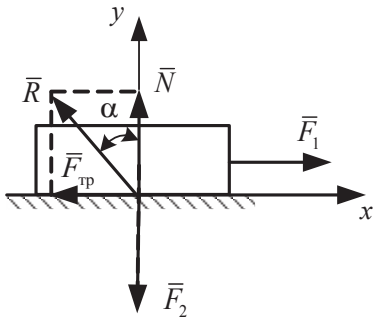


Рис. 1.46

ническую поверхность с центральным углом 2φ , называемую конусом трения.

При решении ряда задач удобно пользоваться понятием равнодействующей сил трения и нормального давления. К плоскому ползуну, находящемуся на горизонтальной плоскости, приложены силы F_1 и F_2 , под действием которых ползун находится в предельном случае покоя, либо перемещается с постоянной скоростью, т. е. сила трения $F_{\text{тр}} = fN$ (рис. 1.46).

Равнодействующая сил трения и нормального давления $\bar{R} = \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{N}$. Определим угол α , который составляет сила R с нормалью к поверхности контакта:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{fN}{N} = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда $\alpha = \varphi$, т. е. равнодействующая сил трения и нормального давления отклонена от направления нормали на угол трения в обратную сторону относительного движения, а в случае предельного покоя в обратную сторону действия силы F_1 .

Трение скольжения во вращательной кинематической паре

При определении момента трения будем рассматривать случай кинематической пары с зазором, в которой радиус внутреннего звена несколько меньше наружного. Величина зазора в реальных механизмах настолько мала, что при решении задачи полагаем, что радиусы отверстия и внутренней детали одинаковы и равны и геометрические оси поверхностей совпадают (см. рис. 1.47, а). К звену 1 приложена вертикальная сила F , в точке A контакта со звеном 2 возникает сила реакции R . Если к звену 1 приложить момент M , то оно будет вращаться и перекатываться по внутренней поверхности звена 2 до тех пор, пока не наступит состояние равновесия, при этом точка контакта A переместится в сторону от оси.

Из условия равновесия звена 1 $M = \rho R$ и $R = F$, следовательно, $M_{\text{тр}} = \rho F$. Реакция R является геометрической суммой двух сил — силы трения $F_{\text{тр}}$ и нормального давления N , с которой R образует угол φ [1, с. 25].

Плечо реакции R относительно центра O $\rho = r \sin \varphi$ (рис. 1.47, б). Для малых углов $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = f$. Следовательно, момент трения во вращательной паре

$$M_{\text{тр}} = f \cdot F \cdot r. \quad (1.18)$$

Величина ρ называется радиусом круга трения.

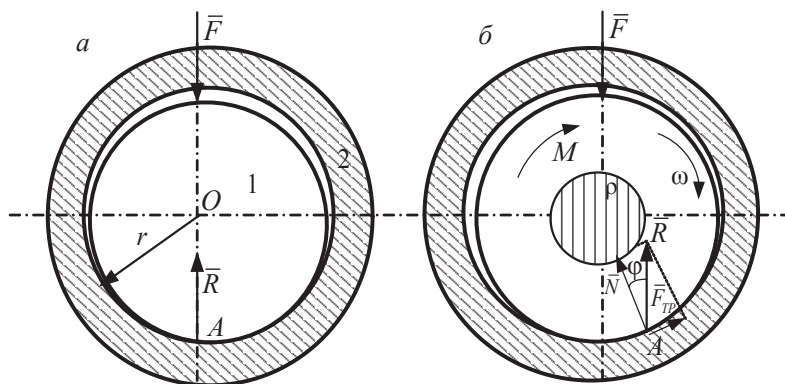


Рис. 1.47

Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Вследствие деформации тел их касание происходит вдоль площадки AB (см. рис. 1.48). Распределенная по площадке система сил реакции может быть заменена силой и парой. В свою очередь сила раскладывается на две составляющие — нормальную и силу трения скольжения. При равновесии тела момент сопротивления качению определяется из условия равновесия системы сил. Экспериментальным путем установлено, что момент трения качения пропорционален нагрузке

$$M_{\text{тр}} = kR. \quad (1.19)$$

Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом трения качения и имеет размерность длины.

По физическому смыслу k представляет расстояние, на которое сместилась равнодействующая напряжений смятия цилиндра при его качении в сторону движения (рис. 1.49).

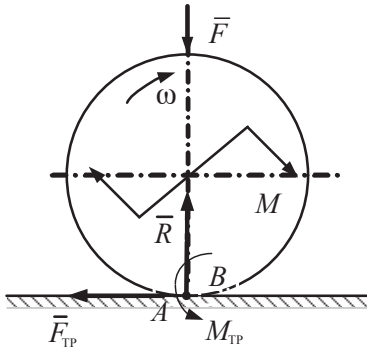


Рис. 1.48

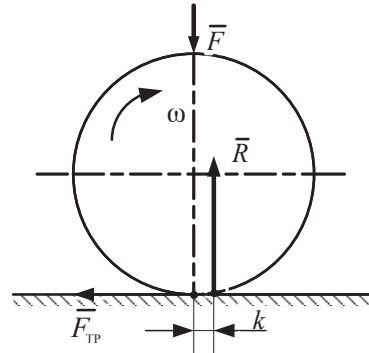


Рис. 1.49

1.2. Кинематика

1.2.1. Основные понятия, определения и задачи кинематики

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются **геометрические свойства движения тел** без учета их инертности и действующих на них сил.

Под движением будем понимать **изменение** с течением времени **положения** данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени относительно неподвижного тела с этим **неподвижным телом связывают систему координат**, которая вместе с неподвижным телом образует **систему отсчета**. Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей.

Движение тел происходит в пространстве с течением времени. **Пространство** мы рассматриваем как **трехмерное евклидово пространство**. Все измерения в нем проводим на основании евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояния принимается 1 м. За еди-

ницу времени принимается 1 с. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах **кинематики время t** принимают за **независимое переменное (аргумент)**. Все другие переменные величины (расстояния, скорости, ускорения) будут являться **функциями времени**. Отсчет времени ведется от некоторого момента $t = 0$, о выборе которого в каждом случае условливаются.

Для решения задач кинематики необходимо задать закон движения. Поэтому **изучение движения** любого объекта будем начинать с **установления способов задания** этого движения.

Изучение кинематики начнем с изучения простейшего объекта — **точки**, затем перейдем к кинематике **твердого тела**.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно системы отсчета, называется **траекторией точки**. Если траектория — прямая линия, движение точки называется прямолинейным, если кривая — криволинейным.

1.2.2. Способы задания движения точки

Для задания движения точки применяют один из трех способов:

- естественный;
- векторный;
- координатный.

Естественный способ задания движения точки

Этим способом удобно пользоваться, когда траектория движущейся точки известна заранее. Кривая AB (рис. 1.50) является траекторией точки M при ее движении относительно системы отсчета O_{xyz} . Выберем точку Q' , которая является началом отсчета, и установим положительное и отрицательное направления отсчета. Положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной координ-

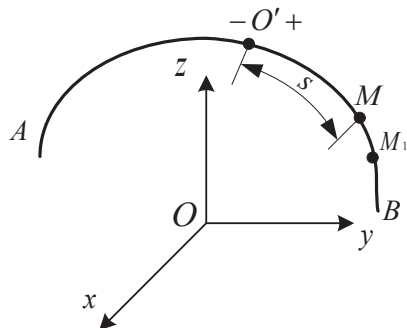


Рис. 1.50

натой s , равной расстоянию от точки O' до точки M , измеренному вдоль дуги траектории.

Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s = f(t). \quad (1.20)$$

Уравнение (1.20) выражает **закон движения точки M** вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, надо знать:

- траекторию точки;
- начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направления;
- закон движения точки вдоль траектории в виде $s = f(t)$.

Векторный способ задания движения точки

Пусть точка M движется относительно векторной системы отсчета O_{xyz} . Положение этой точки в любой момент времени можно

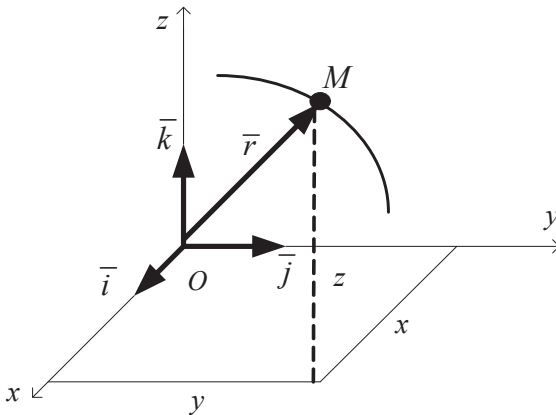


Рис. 1.51

определить, задав ее радиус-вектор \vec{r} , проведенный из начала координат в точку M (рис. 1.51).

При движении точки M вектор \vec{r} изменяется и по модулю и по направлению. Следовательно, \vec{r} является переменным вектором, зависящим от аргумента t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) определяет закон движения точки M в векторной форме, т. к. в любой момент времени можно построить вектор \vec{r} и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора \vec{r} (годограф) определяет траекторию движущейся точки.

Аналитически вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольной системе проекции вектора на оси $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$. Тогда

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.22)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы (орты) координатных осей.

Векторный способ применяется, в основном, для получения общих формул.

Координатный способ задания движения точки

Положение точки определяется ее координатами x , y и z , которые при движении точки с течением времени будут изменяться. Чтобы задать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, необходимо знать координаты для каждого момента времени, т. е. знать зависимости:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (1.23)$$

Уравнения (1.23) представляют уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Если движение происходит в одной плоскости, то:

$$x = f_1(t); y = f_2(t). \quad (1.24)$$

При прямолинейном движении точки ее движение будет определяться одним уравнением (закон прямолинейного движения точки):

$$x = f_1(t). \quad (1.25)$$

Уравнения (1.23) и (1.24) одновременно представляют уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет

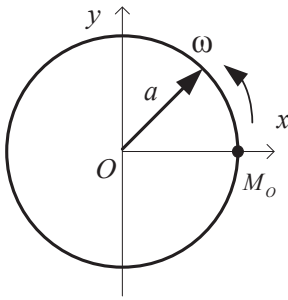


Рис. 1.52

время t . Исключив из уравнений движения параметр t , получим уравнение траектории в обычной форме.

Задача. Движение точки задано уравнением $x = a \cos kt, y = a \sin kt$, где a и k — постоянные величины (рис. 1.52). Определить траекторию движения.

Решение. Для получения уравнения траектории в обычной форме исключим из уравнений движения параметр t .

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 kt + \sin^2 kt); \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Траектория — окружность радиуса a с центром в начале координат. В начальный момент времени $t = 0$ координаты точки M : $x_0 = a \cos 0 = a, y = a \sin 0 = 0$. В момент времени, следующий за нулевым, x и y будут положительны, значит, точка движется по окружности против часовой стрелки.

1.2.3. Вектор скорости точки

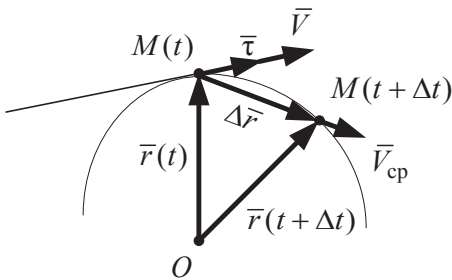


Рис. 1.53

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является скорость. Скорость характеризуется не только численным значением, но и направлением, т. е. скорость является векторной величиной.

Рассмотрим перемещение точки M за малый промежуток времени Δt (рис. 1.53):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Тогда $\vec{V}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ — средняя скорость — вектор, равный отношению вектора перемещения $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени, за который произошло это перемещение.

Скорость точки в данный момент времени — предельное значение вектора, следовательно, вектор скорости точки в данный момент времени равен скорости точки при стремлении Δt к 0, т. е.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.26)$$

Следовательно, вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора по времени.

Размерность скорости:

$$[V] = \frac{L}{T} = \frac{м}{с}.$$

Поскольку секущая \vec{V}_{cp} в пределе переходит в касательную \vec{V} , то скорость точки есть вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки.

1.2.4. Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется **векторная** величина, которая характеризует **изменение** с течением времени **модуля и направления скорости**.

За промежуток времени Δt скорость точки получила приращение $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ (рис. 1.54). Перенесем вектор \vec{V}_1 в точку M и построим параллелограмм для нахождения $\Delta \vec{V}$.

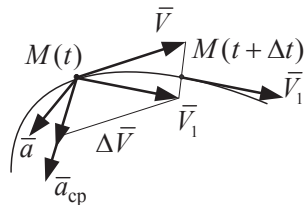


Рис. 1.54

Отношение приращения вектора скорости $\Delta \vec{V}$ к промежутку времени Δt определит вектор среднего ускорения точки M за этот промежуток времени:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (1.27)$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что $\Delta \vec{V}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина \bar{a} , к которой стремится среднее ускорение $\bar{a}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к 0:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

С учетом формулы (1.27):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (1.28)$$

Следовательно, вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

1.2.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

При координатном способе задания движения точки модуль и направление скорости находят через проекции ее на оси координат, согласно следующей теореме: проекции скорости точки на неподвижные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.29)$$

Зная проекции скорости, определим ее модуль и направление, т. е. углы α , β и γ , которые вектор \bar{V} образует с координатными осями:

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \\ \cos \alpha &= \frac{V_x}{V}; \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль и направление найдем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \\ \cos \alpha &= \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

В случае движения в одной плоскости во всех формулах отбрасывается ось z .

В случае прямолинейного движения, которое задается одним уравнением,

$$x = f(t); \quad V = V_x = \frac{dx}{dt}; \quad a = a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

1.2.6. Нахождение скорости при естественном способе задания движения

Перепишем основную формулу (1.26) для скорости в следующем виде:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs — приращение дуговой координаты.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad \text{откуда } \bar{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds},$$

$\frac{d\bar{r}}{ds}$ — орт касательной, модуль которого равен 1, как предел отношения хорды к дуге, ее стягивающей. Направлен этот единичный вектор по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуги.

вых координат. Обозначим орт-вектор касательной $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$. Таким образом, $\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$. Скорость точки направлена всегда по касательной к траектории и **определяется одной проекцией V_{τ} на касательную**. Поэтому в дальнейшем опускаем индекс τ , будем обозначать скорость символом V и называть численным (алгебраическим) значением скорости. Таким образом,

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.32)$$

Численное значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (дуговой координаты) s этой точки по времени.

Поскольку всегда $dt > 0$, то знак скорости совпадает со знаком ds . Если $V > 0$, то скорость направлена в сторону положительного отсчета расстояния s , если $V < 0$, то в противоположную сторону. Таким образом, величина V одновременно определяет и модуль скорости, и ее направление.

1.2.7. Нахождение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорения

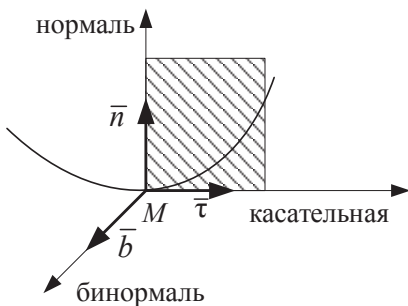


Рис. 1.55

При естественном способе задания движения **ускорение** точки находят через **проекции его на естественные оси** — касательную, нормаль и бинормаль. Естественные оси имеют начало в точке M и движутся вместе с ней по траектории (рис. 1.55).

Главной нормалью называется прямая, расположенная в соприкасающейся плоскости. Если кривая расположена в плоскости, то главная нормаль лежит в плоскости кривой и обычно называется **нормалью**. Она всегда направлена в **сторону вогнутости кривой**.

Бинормаль перпендикулярна соприкасающейся плоскости. Поскольку вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, то его проекция на бинормаль равна нулю.

Соприкасающаяся — плоскость, в которой происходит **бесконечно малый поворот касательной** к траектории при элементарном перемещении движущейся точки.

Найдем **проекции** ускорения на **касательную и нормаль**, обозначая проекции вектора $d\vec{V}$ на эти оси dV_τ и dV_n :

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}; \quad a_n = \frac{dV_n}{dt}. \quad (1.33)$$

Отложим векторы V и V_1 (рис. 1.56, а) из общего начала, $d\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ (рис. 1.56, б).

При бесконечно малом угле смежности $d\phi$ фигуру $DBCA$ можно рассмотреть как прямоугольник. Отсюда:

$$d\vec{V}_\tau = AC = MB - MA = d\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}.$$

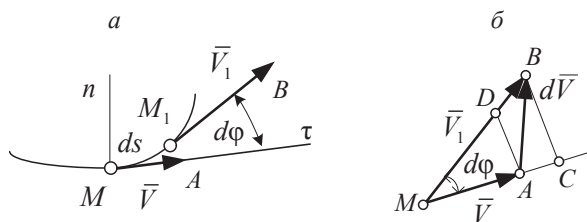


Рис. 1.56

Поскольку предел отношения дуги к хорде равен 1, то AD рассматриваем как элементарную дугу радиуса MA . Тогда проекция $d\vec{V}$ на нормаль dV_n : $dV_n = AD = MA \cdot d\phi = V d\phi$ [1, с. 32].

Подставим найденные значения dV_τ и dV_n в формулу (1.33):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V d\phi}{dt};$$

$$a_n = V \frac{d\phi}{dt} = V \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \cdot V \frac{1}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}, \text{ т. к. } \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

Окончательно:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad a_b = 0. \quad (1.34)$$

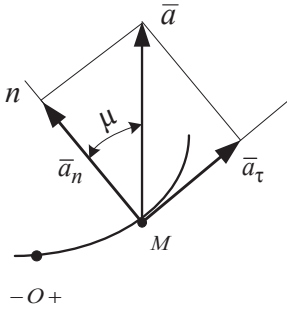


Рис. 1.57

Таким образом, проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от дуговой координаты (расстояния) s по времени. Проекция ускорения на нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории ρ в данной точке кривой. Величины a_τ и a_n называются касательным и нормальным ускорениями точки (рис. 1.57).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Частные случаи:

а) Прямолинейное движение

Траектория — прямая линия, у которой $\rho = \infty$ и полное ускорение точки равно только одному касательному ускорению.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0; \quad a = a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

Касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.

б) Равномерное криволинейное движение

$V = \text{const}$, следовательно, $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$ и все ускорение точки равно

только одному нормальному $a = a_n = \frac{V^2}{\rho}$.

При этом вектор \bar{a} все время направлен по нормали к траектории точки. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Равномерное прямолинейное движение

$a_n = a_\tau = 0$, а значит, $a = 0$. Это единственное движение, в котором ускорение точки все время равно нулю.

Найдем закон равномерного прямолинейного движения:

$$V = \frac{ds}{dt}; \quad ds = Vdt.$$

В начальный момент времени $t = 0$ точка находится от начала отсчета на расстоянии S_0

$$\int_{S_0}^S ds = \int_0^t Vdt; \quad S - S_0 = Vt; \quad S = S_0 + Vt.$$

Если $S_0 = 0$, то S есть путь, пройденный за время t . Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, пропорционален времени, а скорость точки равна отношению пути ко времени $S = Vt$, $V = \frac{S}{t}$.

Равнопеременное движение точки

Равнопеременным движением точки называется такое движение, при котором касательное ускорение остается постоянным $a_\tau = \text{const}$. Найдем закон равнопеременного движения, считая, что в начальный момент времени $t = 0$ дуговая координата равна S_0 и начальная скорость равна V_0 .

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad dV = a_\tau \cdot dt; \quad \int_{V_0}^V dV = \int_0^t a_\tau dt; \quad V - V_0 = a_\tau t \quad \text{и} \quad V = V_0 + a_\tau t;$$

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + a_\tau t; \quad ds = V_0 dt + a_\tau t dt;$$

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t V_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt; \quad S - S_0 = V_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}; \quad S = S_0 + V_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Это и есть закон равнопеременного движения точки.

Если при криволинейном движении модуль скорости возрастает, то это движение ускоренное, а если убывает, то замедленное. Так как изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением a_τ , то движение будет ускоренным, если величины V и a_τ имеют одинаковые знаки, и замедленным, если разные.

В частности, при равнопеременном движении, если в равенстве $V = V_0 + a_\tau t$, V и a_τ имеют одинаковые знаки, то движение будет равноускоренным, а если разные знаки, то равнозамедленным.

1.2.8. Поступательное и вращательное движение

Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь **параллельной** своему первоначальному положению.

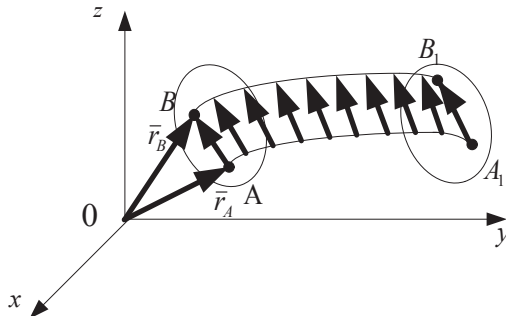


Рис. 1.58

Свойства поступательного движения определяются следующей **теоремой**: при поступательном движении тела все точки описывают **одинаковые траектории** и имеют в каждый момент времени **одинаковые** по модулю и направлению **скорости и ускорения**.

Положение точек A и B (рис. 1.58) в момент времени t определяется радиус-векторами \vec{r}_B и \vec{r}_A .

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}$, при этом длина AB постоянна.

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Производная от постоянного вектора \overline{AB} равна 0.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A; \quad \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

При поступательном движении твердого тела достаточно знать скорость и ускорение любой его точки.

Вращательное движение твердого тела вокруг оси.

Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются во все время движения неподвижными. Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения.

Положение тела в любой момент времени определяется взятым с соответствующим знаком углом φ (см. рис. 1.59).

φ — угол поворота тела. Угол φ меняется с течением времени по определенному закону

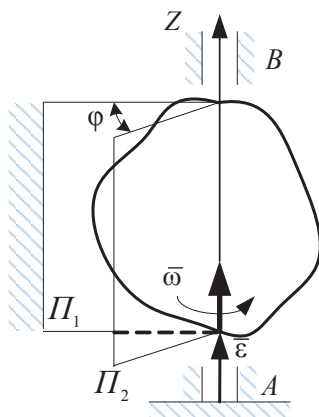


Рис. 1.59

$$\varphi = f(t). \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) — **уравнение вращательного движения тела.**

Для характеристики быстроты вращения тела вокруг оси вводится понятие угловой скорости тела. Средняя угловая скорость:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1.36)$$

Угловая скорость тела в данный момент времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.37)$$

Угловая скорость тела в данный момент времени есть первая производная от угла поворота по времени. Размерность угловой скорости $\frac{\text{радиан}}{\text{секунда}} = \text{с}^{-1}$.

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$, направленного вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует изменение со временем угловой скорости:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}; \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.38)$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно **первой производной** от угловой скорости тела или **второй производной** от угла поворота по времени. Размерность углового ускорения

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{радиан}}{\text{секунда}^2} = \text{с}^{-2}.$$

Угловое ускорение тела по аналогии с угловой скоростью можно изобразить в виде вектора, направленного вдоль оси вращения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадает, если движение ускоренное и противоположно при замедленном движении.

Равномерное и равнопеременное вращение

Если во все время движения $\omega = \text{const}$, то такое движение называется равномерным.

Поскольку $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ то $d\varphi = \omega dt$. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt; \quad \varphi - \varphi_0 = \omega t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (1.39)$$

Это уравнение равномерного вращения тела:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}, \quad (1.40)$$

где $\varphi - \varphi_0$ — угол поворота за время t ; $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1}$, n измеряется в об/мин.

Равнопеременным называется вращение, при котором величина углового ускорения во все время движения остается **постоянной**, $\varepsilon = \text{const}$.

Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$, а угловая скорость

$$\omega = \omega_0. \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad d\omega = \varepsilon dt; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt; \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.41)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t; \quad d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \quad (1.42)$$

Формула (1.42) выражает **закон равнопеременного вращения**. Угловая скорость этого движения выражается уравнением (1.41).

1.2.9. Скорости точек тела при вращательном движении

Возьмем точку M на расстоянии R от оси вращения. При вращении тела вокруг оси эта точка описывает окружность радиуса R .

Выберем за начало точку O_1 , лежащую в плоскости Π_1 (рис. 1.60), за направление положительного отсчета — направление против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения. Дуговая координата:

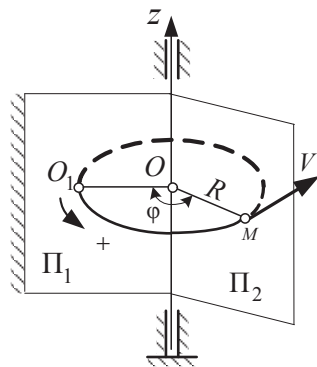


Рис. 1.60

$$S = O_1 M = R\varphi; V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (1.43)$$

Линейная скорость точки вращающегося тела по модулю равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к окружности, описываемой точкой.

1.2.10. Ускорения точек вращающегося тела

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad \rho = R. \quad (1.44)$$

Подставим в формулу (1.44) значение V из выражения (1.43):

$$a_\tau = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon; a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2 \quad (1.45)$$

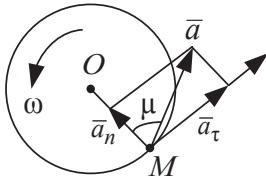


Рис. 1.61

Составляющая a_τ направлена по касательной к окружности, a_n всегда направлена к центру вращения (рис. 1.61).

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

1.2.11. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным или плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно одной неподвижной плоскости.

Большинство механизмов являются плоскими, поэтому изучение этого вида движения имеет большое практическое значение.

Тело A совершает плоское движение параллельно неподвижной плоскости Π . Рассечем тело плоскостью $\Pi_1 \parallel \Pi$ (рис. 1.62).

В сечении получим фигуру S , которая все время остается в плоскости Π_1 . При плоском движении все точки тела, лежащие на отрезке CM , перпендикулярном плоскости Π , движутся тождественно.

Таким образом, для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Π_1 плоская фигура S . Плоское движение определено движением плоской фигуры в своей плоскости, что упрощает решение задач.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-либо отрезка AB , проведенного на этой фигуре. В свою очередь положение отрезка AB можно определить, если знать координаты точки A и угол φ (рис. 1.63).

Точку A , выбранную для определения положения фигуры S , в дальнейшем будем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут меняться. Чтобы знать положение S в любой момент времени, необходимо иметь зависимость

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (1.47)$$

Уравнения (1.47) определяют закон движения и называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоского движения твердого тела.

Первые два уравнения определяют поступательное движение фигуры, если $\varphi = \text{const}$. Все точки фигуры движутся так же, как полюс A . Третье уравнение определяет вращательное движение вокруг полюса, если $x_A = \text{const}$ и $y_A = \text{const}$.

Отсюда вывод: в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного, при котором все точки движутся так же, как полюс A , и вращательного вокруг этого полюса.

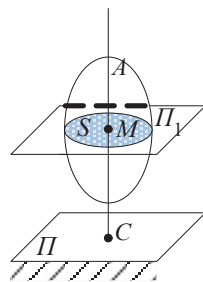


Рис. 1.62

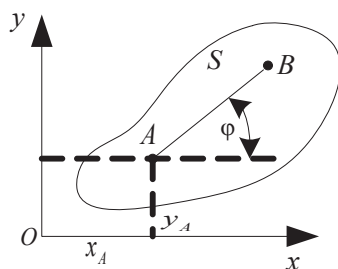


Рис. 1.63

Скорость \vec{V}_A и ускорение \vec{a}_A точки A называется скоростью и ускорением полюса, для разных полюсов они будут различны.

Следует запомнить, что скорость и ускорение полюса зависят от выбора полюса, а угловая скорость и угловое ускорение фигуры от выбора полюса не зависят.

1.2.12. Скорости точек плоской фигуры

Скорость любой точки плоской фигуры можно найти, если известна **скорость одной точки и угловая скорость фигуры**. Пусть задана скорость точки A , \vec{V}_A и угловая скорость фигуры ω . Движение фигуры рассматриваем как составное, состоящее из поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса. За полюс примем точку A , скорость которой известна.

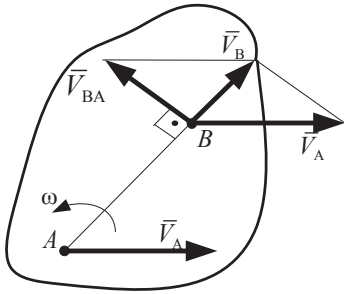


Рис. 1.64

Абсолютная скорость точки B равна геометрической сумме переносной (вместе с полюсом) и относительной (вокруг полюса) скоростей (рис. 1.64). Скорость V_{BA} направлена перпендикулярно к AB в сторону угловой скорости, $V_{BA} = \omega AB$.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (1.48)$$

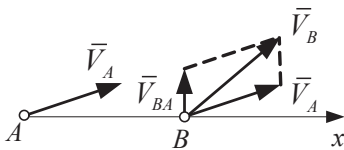


Рис. 1.65

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Следствие. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (рис. 1.65):

$$\text{Pr} \vec{V}_B = \text{Pr} \vec{V}_A + \underbrace{\text{Pr} \vec{V}_{BA}}_0.$$

1.2.13. Ускорение точек плоской фигуры

Ускорение точек плоской фигуры можно найти так же, как и скорости, рассматривая движение фигуры как составное из переносного поступательного вместе с полюсом и относительного вращательного вокруг полюса.

Пусть заданы в момент времени t ускорение точки A \vec{a}_A , угловая скорость ω и угловое ускорение фигуры ε (рис. 1.66).

Ускорение любой точки плоской фигуры равно **геометрической сумме переносного ускорения**, равного ускорению полюса, и **относительного ускорения** во вращательном движении с фигурой вокруг полюса.

Через \vec{a}_{BA} обозначено относительное ускорение точки B во вращательном движении, которое можно разложить на два ускорения: нормальное \vec{a}_{BA}^n и касательное \vec{a}_{BA}^τ . На рис. 1.67 \vec{a}_{BA}^n направлено по BA к полюсу; \vec{a}_{BA}^τ направлено перпендикулярно BA в зависимости от ускоренного или замедленного вращения. Тогда можно записать

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau,$$

где $\vec{a}_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$; $\vec{a}_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot BA$; $\vec{a}_{BA} = BA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

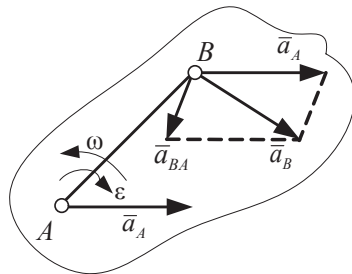


Рис. 1.66

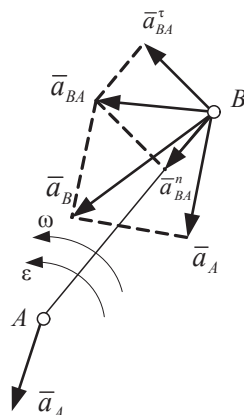


Рис. 1.67

1.2.14. Примеры решения задач по кинематике

Задача 1. Составление уравнений движения точки

Линейка эллипсографа (см. рис. 1.68) длиной $AB = l = 1$ м скользит своими концами по осям OX и OY . Конец A линейки движется вправо по оси x , при этом закон этого движения $OC = 0,1t$ м. Составить уравнения движения точек B и M , если $AM = 0,5MB$.

Точка B движется по оси OY , поэтому $X_B = 0$. Координату $Y_B = OB$ найдем из прямоугольного $\triangle OAB$:

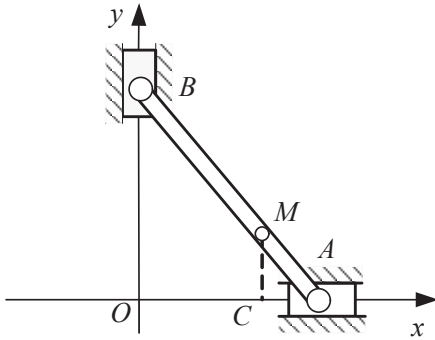


Рис. 1.68

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{1 - 0,01t^2}.$$

Таким образом, уравнения движения точки B при координатном способе задания движения:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= 0 \\ Y_B &= \sqrt{1 - 0,01t^2} \end{aligned} \right\}.$$

Чтобы найти уравнение движения точки M , определим координаты этой точки: $X_M = OC$; $Y_M = MC$.

Из подобия $\triangle OAB$ и $\triangle CAM$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{MC}{OB} &= \frac{AC}{OA} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}; \quad MC = \frac{1}{3}OB; \quad AC = \frac{1}{3}OA; \\ \left. \begin{aligned} X_M &= OC = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}t = \frac{1}{15}t \\ Y_M &= MC = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 0,01t^2} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Это и есть уравнения движения точки M при координатном способе задания движения.

Задача 2. Равномерное вращательное движение.

Маховое колесо вращается с угловой скоростью $\omega = 16 \text{ с}^{-1}$. Определить, сколько оборотов сделает колесо за 5 минут вращения.

Решение: Определим частоту вращения. Угловая скорость связана с частотой вращения зависимостью $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$, где n — частота вращения, измеряемая в оборотах в минуту.

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 16}{3,14} = 152,5 \frac{\text{об}}{\text{мин}}. \text{ За 5 минут } n = 152,5 \cdot 5 = 762,5 \text{ об.}$$

Задача 3. Дисковая пила 1 с диаметром $d_1 = 600$ мм закреплена на одном валу со шкивом 2, диаметр которого $d_2 = 300$ мм (рис. 1.69). Шкив двигателя 3 имеет диаметр $d_3 = 100$ мм. Шкивы соединены бесконечным ремнем. Какова должна быть угловая скорость вала двигателя, чтобы окружная скорость зубьев пилы не превышала 15 м/с.

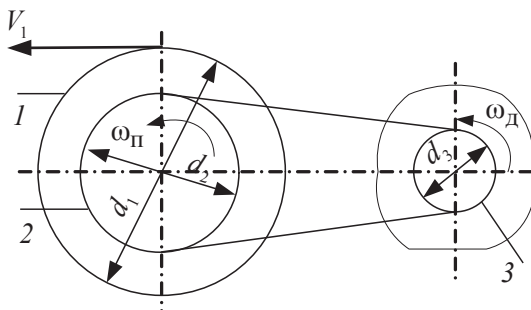


Рис. 1.69

Решение: Угловая скорость пилы равна угловой скорости шкива 2. Отсюда

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2V_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 15}{0,6} = 50 \frac{1}{c}.$$

Так как ремень движется без проскальзывания, то линейные скорости шкивов одинаковы и равны скорости ремня.

$$V_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2} = V_3 = \omega_3 \frac{d_3}{2}; \quad \omega_3 = \omega_Д = \omega_2 \frac{d_2}{d_3} = 50 \frac{300}{100} = 150 \frac{1}{c}.$$

Переведем угловую скорость в частоту вращения в об/мин.

$$n_Д = \frac{30\omega_Д}{\pi} = \frac{30 \cdot 150}{3,14} = 1400 \frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

Задача 4. Ускоренное вращательное движение твердого тела.

При пуске в ход ротор мотора (см. рис. 1.70) вращается по закону

$$\varphi = \frac{\pi}{6} t^3.$$

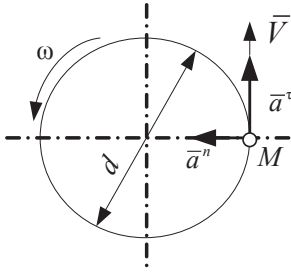


Рис. 1.70

Определить угловую скорость ω , угловое ускорение ε ротора, а также окружную скорость V и ускорение точки M через 1 с после пуска. Диаметр ротора $d = 0,2$ м.

Решение:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3\pi t^2}{6} = \frac{\pi}{2} t^2 \frac{1}{\text{с}}; \\ \varepsilon &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi t}{2} = \pi t \frac{1}{\text{с}^2}; \\ V &= \omega \frac{d}{2} = \frac{\pi d t^2}{4} \frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ a^\tau &= \varepsilon \frac{d}{2} = \frac{\pi d t}{2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \\ a^n &= \omega^2 \frac{d}{2} = \frac{d\pi^2 t^4}{8} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.\end{aligned}$$

В момент времени $t = 1$ с:

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi d}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,2}{4} = 0,157 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ a^\tau &= \frac{\pi d}{2} = \frac{3,14 \cdot 0,2}{2} = 0,314 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \\ a^n &= \frac{\pi^2 d}{8} = \frac{3,14^2 \cdot 0,2}{2} = 0,246 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \\ a &= \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0,246^2 + 0,314^2} = 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.\end{aligned}$$

1.3. Динамика

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенным к ним сил.

Опыт показывает, что одна и та же сила, действующая на разные по массе свободные тела, сообщает им за один и тот же промежуток времени различные ускорения.

Это свойство материальных тел изменять свою скорость быстрее или медленнее под действием приложенных сил называется инертностью. За меру инертности при поступательном движении принимают постоянную положительную скалярную величину, называемую массой тела; при вращательном движении мерой инертности тела является момент инерции.

Простейшим объектом, рассматриваемым в динамике, является материальная точка, т. е. тело, размерами которого при рассмотрении его движения можно пренебречь. При решении ряда задач тело конечных размеров можно принять за материальную точку. Это возможно в тех случаях, когда движение отдельных точек тела не отличается друг от друга. В частности, тело, движущееся поступательно, в динамике рассматривается как материальная точка, масса которой равна массе всего тела.

Совокупность механически взаимодействующих материальных точек или тел называется механической системой. Движение каждой точки, входящей в систему, зависит от движения остальных точек системы. Материальное тело твердое, упругое, жидкое, любая машина и сооружение в динамике рассматриваются как механическая система. Различают механические системы неизменяемые и изменяемые. В неизменяемой системе расстояния между точками остаются неизменными (пример — абсолютно твердое тело). В изменяемой системе расстояния между точками изменяются. Такими системами, к примеру, являются все механизмы, упругие и жидкие тела. Изучать динамику начнем с динамики материальной точки.

1.3.1. Законы динамики

В основе динамики, как и всей теоретической механики, лежат законы, открытые Галилеем и Ньютоном и впервые сформулированные Ньютоном в 1687 году в его классическом трактате «Математические начала натуральной философии». Эти законы называют обычно законами Ньютона, а механика, основанная на них, называется классической механикой. Законы классической механики были установлены путем обобщения большого числа опытов и наблюдений над

движением макроскопических тел, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Выводы классической механики вполне удовлетворяют запросам обычной техники, имеющей дело с деталями и звеньями, движущимися со скоростями, намного меньшими скорости света.

Первый закон — закон инерции.

Материальная точка, на которую не действуют силы, либо находится в состоянии покоя, либо движется прямолинейно и равномерно.

Движение, совершаемое материальной точкой, на которую не действует сила или действует уравновешенная система сил, называется движением по инерции или инерциальным.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи — пребывать неизменно в движении. Важным является вопрос о том, по отношению к какой системе отсчета справедлив закон инерции. В механике такую систему отсчета называют инерциальной. С большой точностью для решения многих технических задач инерциальную систему отсчета жестко связывают с землей.

Второй закон — основной закон динамики.

Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, имеющее направление силы и по модулю пропорциональное модулю силы.

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1.49)$$

где m — масса; a — ускорение.

Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса. Тело с большей массой получит меньшее ускорение, т. е. оно более инертно.

Второй закон называют основным законом динамики, а равенство (1.49), выражающее его, называют основным уравнением динамики точки.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они будут эквивалентными равнодействующей \bar{R} , равной геометрической сумме системы. Уравнение, выражающее основной закон динамики, в этом случае примет вид:

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.50)$$

Третий закон (равенства действия и противодействия)

Две материальные точки действуют друг на друга силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны. Этот закон описывает взаимодействие точек механической системы и применяется для изучения динамики систем.

Законы классической механики справедливы лишь для абсолютно свободных точек. Однако, несвободные точки можно представить как свободные, используя принцип освобождаемости от связей: *не нарушая состояния покоя или движения точки, можно отбросить наложенные на нее связи и заменить их действие соответствующими реакциями.*

На основании этого принципа основное уравнение динамики для несвободной точки примет вид:

$$m\bar{a} = \bar{F} = \sum \bar{F}_{ak} + \sum \bar{F}_p, \quad (1.51)$$

где \bar{F} — равнодействующая всех активных сил и реакций, приложенных к движущейся точке.

1.3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Для решения задач динамики используют одну из двух систем уравнений.

1. Уравнения в декартовой системе координат

Движение точки в декартовой системе координат задается уравнениями:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Задачи динамики точки состоят в том, чтобы, зная законы движения, определить действующую на точку силу или, наоборот, зная действующие на точку силы, определить закон движения. Следовательно, для решения задач динамики необходимо, используя второй закон динамики, связать координаты точки и действующие на них силы.

Пусть на материальную точку с массой m действуют силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Точка движется в инерциальной системе отсчета O_{xyz} .

Основное уравнение динамики точки запишем в виде: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ и спроецируем обе части равенства на координатные оси x , y и z . Учитывая, что

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}. \quad (1.52)$$

Или:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в прямоугольных декартовых координатах.

Если точка движется в плоскости, то взяв координатные оси ox и oy в плоскости движения точки, получим вместо трех два дифференциальных уравнения:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} \quad \text{и} \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}. \quad (1.53)$$

Если точка совершает прямолинейное движение, то получим одно дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}. \quad (1.54)$$

Уравнение (1.54) — дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки.

2. Уравнения в проекциях на естественные оси координат

Для получения этих уравнений спроецируем обе части уравнения $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ на касательную, нормаль и бинормаль к траектории.

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}; \quad ma_n = \sum F_{kn}; \quad ma_b = \sum F_{kb}.$$

Учитывая, что $a_\tau = \frac{dV}{dt}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho}$; $a_b = 0$, получим:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb}. \quad (1.55)$$

Уравнение (1.55), где $V = \frac{dS}{dt}$, представляет собой дифференциальное уравнение движения точки в проекциях на естественные оси. Они были впервые получены Эйлером и носят название естественных уравнений движения материальной точки. С помощью этих уравнений многие задачи динамики точки, особенно такие, в которых известна ее траектория, решаются проще, чем при помощи уравнений в прямоугольных декартовых координатах.

1.3.3. Две основные задачи динамики

В динамике решаются две основные задачи:

1. По заданному движению точки определить силы, производящие это движение.

2. По заданным силам, действующим на точку или систему, определить закон движения точки или системы.

Для несвободной материальной точки, т.е. точки, на которую наложена связь, вынуждающая ее двигаться по заданной поверхности или кривой, первая задача динамики обычно заключается в определении реакции связи. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении точки распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить:

- закон движения точки,
- реакции наложенной связи.

Обе задачи решаются при помощи уравнений (1.52) и (1.55).

Решение первой задачи динамики

Пусть движение точки массой m задано координатным способом, т. е.

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Дифференцируя дважды по t и подставляя значения $m, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ в уравнение (1.52), найдем проекции равнодействующей силы на оси координат: $F_x = m\ddot{x}$; $F_y = m\ddot{y}$; $F_z = m\ddot{z}$. Модуль и направляющие косинусы равнодействующей определим по известным формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos(\bar{F}, \bar{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\bar{F}, \bar{j}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\bar{F}, \bar{k}) = \frac{F_z}{F}.$$

Если движение точки задано естественным способом, т. е. задана траектория и закон движения точки $S = f(t)$ по траектории, то равнодействующую силу найдем по уравнениям (1.55).

Определяем

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Подставляем найденные значения в уравнения (1.55):

$$m \frac{d^2S}{dt^2} = \Sigma F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}.$$

Находим проекции равнодействующей на касательную и нормаль (см. рис. 1.71). Модуль и направление равнодействующей определим по формулам:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_\tau}{F} = \frac{\ddot{S}}{\sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right)^2}},$$

где α — угол, образованный равнодействующей с положительным направлением касательной к траектории точки.

Задача. Точка массой m кг движется в плоскости Oxy (рис. 1.72). Уравнение ее движения в прямоугольных декартовых координатах $x = a \cos kt$, $y = a \sin kt$ (x и y — в метрах, t — в секундах), a и k — постоянные. Найти силу, действующую на точку.

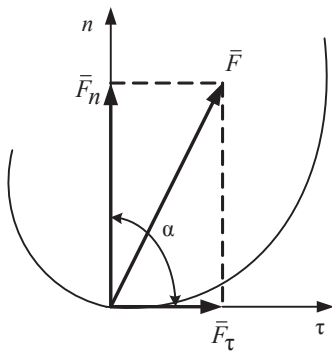


Рис. 1.71

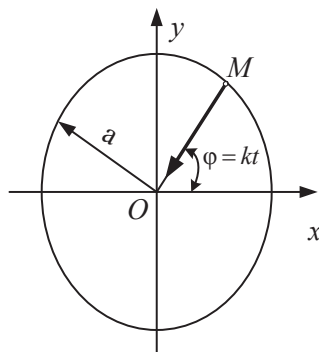


Рис. 1.72

Решение:

- Исключив параметр t , найдем уравнение траектории:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 kt + a^2 \sin^2 kt = a^2 (\cos^2 kt + \sin^2 kt) = a^2.$$

Следовательно, траектория — окружность радиуса a с центром в начале координат.

- Для нахождения силы вычислим $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$.

$$\dot{x} = -ak \sin kt; \quad \ddot{x} = -ak^2 \cos kt; \quad \dot{y} = ak \cos kt; \quad \ddot{y} = -ak^2 \sin kt;$$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = ak \text{ м/с}$. Подставим эти значения в дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах:

$$F_x = -m \cdot ak^2 \cos kt; \quad F_y = -m \cdot ak^2 \sin kt.$$

Модуль силы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot ak^2 \sqrt{\cos^2 kt + \sin^2 kt} = m \cdot ak^2 [\text{Н}];$$

$$\cos(\bar{F} \wedge \bar{x}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{m \cdot ak^2 \cos kt}{m \cdot ak^2} = -\cos kt.$$

Сила \vec{F} направлена к центру окружности.

Следовательно, равномерное движение точки по окружности происходит под действием постоянной по модулю силы, направленной к центру окружности. Как известно, эта сила называется центростремительной.

Отметим, что при решении первой задачи динамики дифференциальные уравнения движения (1.52) и (1.55) интегрировать не приходится.

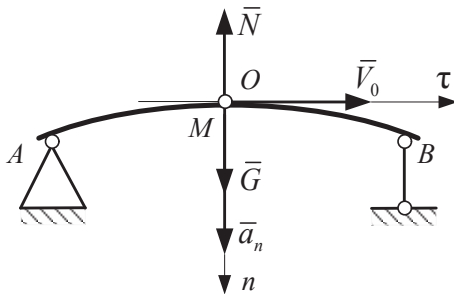


Рис. 1.73

Задача. Автомобиль массой m движется с постоянной скоростью V_0 по выпуклому мосту, имеющему в вертикальном сечении форму дуги окружности радиуса ρ . Определить давление автомобиля на мост в момент прохождения им середины моста (рис. 1.73).

Решение: Рассмотрим автомобиль как материальную точку. Так как известна его траектория, то воспользуемся естественными уравнениями движения точки. Найдем проекции ускорения на касательную и нормаль:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0, \text{ так как } V = \text{const}, \text{ то } a_n = \frac{V_0^2}{\rho}.$$

На автомобиль действуют две силы — сила веса \vec{G} и реакция моста \vec{N} . Из формулы (1.55) получим: $\vec{F}_\tau = m \cdot a_\tau = 0$; $F_n = \frac{m \cdot V_0^2}{\rho} = G - N$, откуда $N = G - \frac{m \cdot V_0^2}{\rho}$. Мы нашли не давление автомобиля на мост, а реакцию моста. Но по третьему закону Ньютона давление автомобиля на мост равно реакции моста. Следовательно, $F_1 = N = G - \frac{m \cdot V_0^2}{\rho}$ и направлена вниз.

Решение второй задачи механики при прямолинейном движении точки

Пусть на точку массой m действуют заданные силы. Нужно найти закон движения точки, т. е. определить координаты точки как функции времени.

Решение: Вторая задача динамики, как и первая, решается с помощью дифференциального уравнения движения точки.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \quad \text{или} \quad m \ddot{x} = \sum F_{kx}.$$

Иногда его удобно заменить двумя уравнениями, содержащими первые производные:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}; \quad \frac{dx}{dt} = V_x. \quad (1.56)$$

Решение состоит в том, чтобы из уравнений движения, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x = f(t)$.

Входящие в правую часть уравнения (1.56) силы могут зависеть от времени t , положения точки x и от ее скорости, т. е. $V_x = \dot{x}$. Следовательно, в общем случае уравнение (1.56) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее вид:

$$m \ddot{x} = \sum F(t, x, \dot{x}).$$

Как известно из математики, общее решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Таким образом, общее решение уравнения будет иметь вид

$$x = f(t, C_1, C_2). \quad (1.57)$$

Таким образом, мы получим бесконечно много решений, т. е. законов движения точки, зависящих от двух параметров при движении по прямой.

Чтобы довести решение до конца, надо определить значение постоянных интегрирования C_1 и C_2 . Их находят с помощью так называ-

емых начальных условий. Начальные условия задают в виде: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Приложенные к точке силы и начальные условия полностью определяют движение точки.

Рекомендуется проводить решение задач динамики точки в следующем порядке:

- Выбрать систему отсчета. При решении большинства задач о движении точки начало координат удобно выбирать в начальном положении, т. е. в том положении, где точка находится в момент времени $t = t_0 = 0$. Направление оси удобно брать совпадающим с направлением начальной скорости.
- Изобразить на чертеже движущуюся точку в произвольный момент времени.
- Изобразить на чертеже силы, действующие на точку (активные и реактивные), в виде векторов, приложенных к точке.
- Составить дифференциальные уравнения движения точки.
- Записать начальные условия движения точки и определить из начальных условий постоянные интегрирования.
- Если решение проведено в общем буквенном виде, то произвести проверку ответа на размерность.
- Найти требуемые величины и произвести исследование решения.

1.3.4. Работа силы, мощность

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при его перемещении, вводится понятие о работе силы. Введем понятие об элементарной работе.

Элементарной работой силы \vec{F} , приложенной в точке M , называется скалярная величина $dA = F_\tau \cdot ds$, где F — проекция силы F на касательную $M\tau$ к траектории точки (или проекция на направление скорости \vec{V}); ds — модуль элементарного перемещения точки M .

Разложим силу F на составляющие F_τ , F_n (см. рис. 1.74).

Изменять скорость будет F_τ , т. к. $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$.

$F_\tau = F \cos \alpha$, где α — угол между \vec{F} и F_τ , тогда:

$$dA = Fds \cos \alpha, \quad (1.58)$$

если α — острый, то работа положительна;
 если α — тупой, то работа отрицательна;
 если $\alpha = 90^\circ$, т. е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то $dA = 0$.

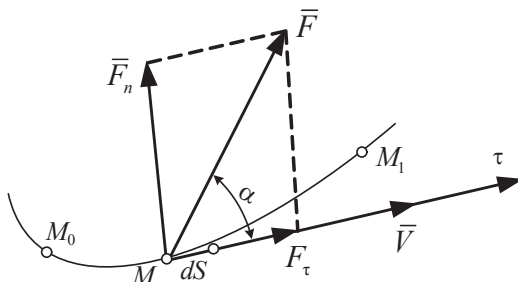


Рис. 1.74

Знак работы имеет следующий смысл:

Работа положительна, когда сила ускоряет движение, и отрицательна — когда замедляет. Аналитическое выражение элементарной работы можно записать в виде

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где x, y, z — координаты точки приложения силы F .

Работа силы на любом конечном перемещении $M_0 M_1$ вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_A ds \quad \text{или} \quad A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (1.59)$$

Следовательно, работа силы на любом перемещении $M_0 M_1$ равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

Если $F_\tau = \text{const}$, то обозначив перемещение $M_0 M$ через S_1 , из выражения (1.59) получим:

$$A_{M_0 M_1} = F_\tau \cdot S_1. \quad (1.60)$$

В частности, при прямолинейном движении (рис. 1.75) при $F = \text{const}$:

$$F_\tau = \cos \alpha = \text{const}; \quad A_{M_0 M_1} = FS_1 \cos \alpha.$$

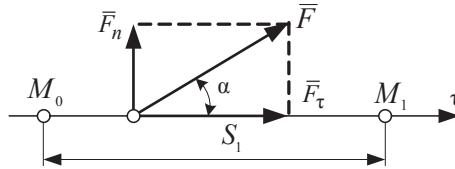


Рис. 1.75

Единицей измерения работы в системе СИ является 1 джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \times \text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$).

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то $P = \frac{A}{t_1}$, где t_1 — время, в течение которого произведена работа A .

В общем случае

$$P = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau \cdot V. \quad (1.61)$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость. Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$).

1.3.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Введем понятие еще об одной основной динамической характеристике движения — о кинетической энергии. Кинетической энергией точки называется скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости. Единица измерения та же, что и работы.

Найдем связь между работой и кинетической энергией. Рассмотрим материальную точку с массой m , перемещающуюся из точки M , где ее скорость была V_0 , в точку M_1 , где ее скорость стала V_1 (рис. 1.76).

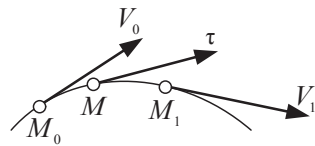


Рис. 1.76

Второй закон динамики $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$. Проектируем обе его части на касательную τ к траектории точки M , направленную в сторону движения $m\bar{a}_\tau = \sum \bar{F}_{k\tau}$, касательное ускорение представим в виде:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds};$$

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}.$$

Умножим обе части равенства на ds и внесем m под знак дифференциала ($F_{k\tau} \cdot ds = dA_k$):

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1 , получим

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}. \quad (1.62)$$

Уравнение (1.62) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки. *Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на том же перемещении.*

При несвободном движении точки в правую часть равенства (1.62) войдет работа заданных (активных) сил F_k^a и работа реакций связи.

При перемещении по неподвижной гладкой поверхности (или кривой) сила трения $F_{\text{тр}} = 0$ и изменение кинетической энергии точки равно сумме работ на этом перемещении приложенных к точке толь-

ко активных сил. Если поверхность не является гладкой, то к работе сил активных прибавится работа сил трения.

1.3.6. Момент инерции тела относительно оси

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси O_z (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадрат расстояния до этой оси

$$J_z = \sum m_k \cdot h_k^2. \quad (1.63)$$

Момент инерции тела относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном движении, т. е. осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $J_z = mh^2$.

Единицы измерения J_z в системе СИ $[1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2]$. Определим моменты инерции некоторых однородных тел, форму которых имеют большинство звеньев механизмов:

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой m .

Вычислим момент инерции относительно оси O_z , перпендикулярной оси стержня и проходящей через его конец (см. рис. 1.77). Для любого элементарного отрезка длиной dx $h = x$, а масса $dm = \rho dx$, где $\rho = \frac{m}{l}$ — масса единицы длины стержня. Переходя от суммы к интегралу, получим:

$$I_z = \int_0^m x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{\ell^3}{3} = \frac{m}{\ell} \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}. \quad (1.64)$$

Для определения момента инерции относительно центральной оси, т. е. оси, проходящей через центр тяжести S (см. рис. 1.78), воспользуемся теоремой Гюйгенса.

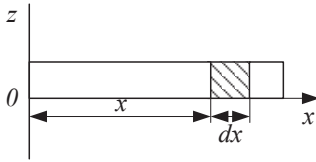


Рис. 1.77

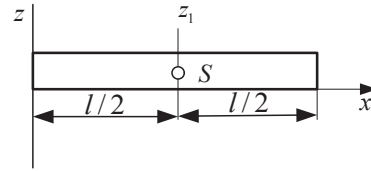


Рис. 1.78

Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр тяжести тела, плюс произведение массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

$$J_z = J_{z_1} + ma^2; \quad a = \frac{\ell}{2};$$

$$J_{z_1} = JS = J_z - ma^2 = \frac{m\ell}{3} - m\frac{\ell^2}{4} = m\frac{\ell^2}{12}. \quad (1.65)$$

2. Тонкое круглое кольцо радиусом R и массой m (рис. 1.79). Поскольку все частицы кольца находятся на расстоянии R от оси Cz , то

$$J_C = \sum m_k R^2 = R^2 \sum m_k = mR^2. \quad (1.66)$$

3. Круглый диск или цилиндр радиусом R и массой m (рис. 1.80).

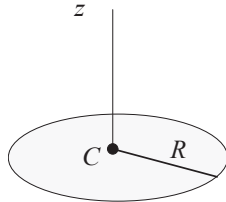


Рис. 1.79

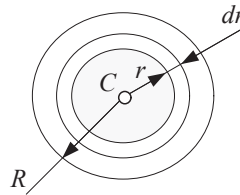


Рис. 1.80

Выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr . Площадь кольца $2\pi r dr$.

Масса единицы площади диска:

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2};$$

$$J_C = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r dr = \rho \pi \frac{R^4}{2} = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}. \quad (1.67)$$

1.3.7. Принцип Даламбера

Это один из общих принципов механики, которым очень удобно пользоваться при решении большого числа задач динамики.

Вначале найдем выражение принципа для одной материальной точки.

Пусть на материальную точку массой m действует система активных сил, равнодействующую которых обозначим \vec{R} , и реакции связи \vec{N} , если точка несвободна. Под действием всех этих сил точка будет двигаться по отношению к инерциальной системе отсчета с некоторым ускорением \vec{a} .

Введем в рассмотрение величину, имеющую размерность силы:

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}. \quad (1.68)$$

Векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная против этого ускорения, называется силой инерции.

Принцип Даламбера для материальной точки формулируется следующим образом:

Если к движущейся точке в любой момент времени приложить действующие на нее активные силы и реакции связи, а также присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{F}_и = 0. \quad (1.69)$$

Нетрудно убедиться, что это выражение эквивалентно второму закону Ньютона $\vec{R} + \vec{N} - m\vec{a} = 0$ или $\vec{R} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия статики, это делает единообразным подход к решению задач и часто упрощает соответствующие расчеты.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю.

Тогда, на основании принципа Даламбера применительно к твердому телу, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_k + \bar{F}_и = 0 \\ \sum m_o(\bar{F}_k) + \bar{m}_o^n = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.70)$$

где $\sum \bar{F}_k$ — векторная сумма (равнодействующая) активных сил и реакций связи; $F_и$ — сила инерции; $\sum m_o(\bar{F}_k)$ — сумма моментов всех активных сил и реакций связи относительно центра O ; m_o^n — момент инерции тела относительно точки O .

Если к движущемуся телу приложить активные силы, реакции связей, активные моменты, а также силу и момент инерции, то можно считать, что тело находится в равновесии и к нему применимы уравнения статики.

Этот принцип носит еще одно название — **принцип кинестатики**. Он очень удобен для решения многих задач, т. к. сводится к решению уравнений статики, которые мы рассмотрели ранее.

Если масса является мерой инертности для поступательного движения тела и сила инерции $F_и = -ma$, так и момент инерции относительно оси (точки) является мерой инертности для вращательного движения тела и момент инерции тела относительно точки O определяется как

$$\bar{m}_o^n = -J_o \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (1.71)$$

где J_o — момент инерции тела, относительно оси вращения, проходящей через точку O ; ε — угловое ускорение тела.

1.3.8. Частные случаи приведения сил инерции

Поступательное движение твердого тела (рис. 1.81).

При поступательном движении твердого тела силы инерции его точек приводятся к одной силе, численно равной произведению массы тела на ускорение центра тяжести, направленной в сторо-

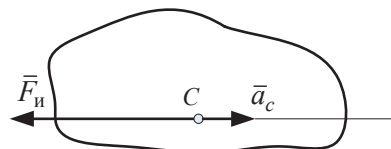


Рис. 1.81

ну, противоположную ускорению, и проходящей через центр тяжести масс тела

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_c.$$

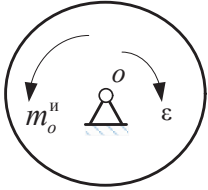


Рис. 1.82

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр тяжести, перпендикулярно оси симметрии (рис. 1.82).

В этом случае силы инерции точек тела приводятся к паре сил, расположенной в плоскости симметрии. Момент этой пары численно равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела и направлен противоположно направлению углового ускорения:

$$\vec{m}_o^и = -J_o \vec{\varepsilon}.$$

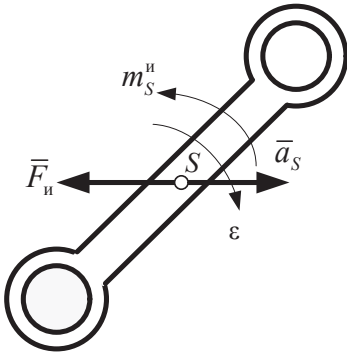


Рис. 1.83

Плоское движение твердого тела параллельно плоскости симметрии (рис. 1.83).

Такое движение можно рассматривать как составное: поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. За полюс примем центр тяжести S . При таком движении силы инерции приводятся к силе $\vec{F}_и = -m\vec{a}_S$, приложенной в центре тяжести, и к паре $\vec{m}_S^и = -J_S \vec{\varepsilon}$, т. е. к системе

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_и &= -m\vec{a}_S \\ \vec{m}_S^и &= -J_S \vec{\varepsilon} \end{aligned} \right\}. \quad (1.72)$$

Задача. Шар массой $m = 1,0$ кг привязан к нити длиной $l = 0,8$ м и вращается в вертикальной плоскости с периодом $t = 1,0$ с. Определить натяжение шнура в момент высшего и низшего положения шара, считая, что скорость V остается постоянной по всей длине окружности.

Решение. Определим скорость шара

$$V = \frac{2\pi\ell}{t} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,8}{1} = 5,024 \text{ м/с.}$$

Определим ускорение шара, считая его материальной точкой, масса которой сосредоточена в его центре тяжести. Поскольку $V = \text{const}$, то $a_\tau = 0$,

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{V^2}{\ell} = \frac{5,024^2}{0,8} = 31,55 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим крайнее верхнее положение шара на его траектории (рис. 1.84).

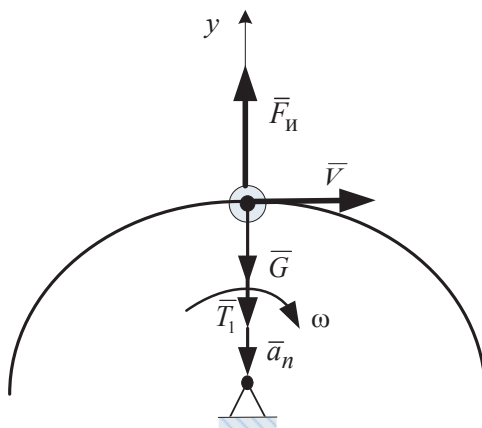


Рис. 1.84

Прикладываем к центру тяжести все действующие силы, включая силу инерции F_n , вес шара G и силу натяжения нити T_1 . Согласно принципу Даламбера сумма проекций сил активных, инерции и реакций связи на вертикальную ось y равняется нулю.

$$\sum F_{ky} = 0; F_n - G - T_1 = 0,$$

где $F_n = ma = ma_n$; $G = mg$;

$$T_1 = F_u - G = m(a_n - g) = 1,0 (31,55 - 9,81) = 21,74 \text{ Н.}$$

Рассмотрим крайнее нижнее положение шара (рис. 1.85). Проецируем все силы на ось y и записываем уравнение относительно натяжения нити T_2 . Заметим, что реакция нити всегда направлена к точке подвеса (рис. 1.85)

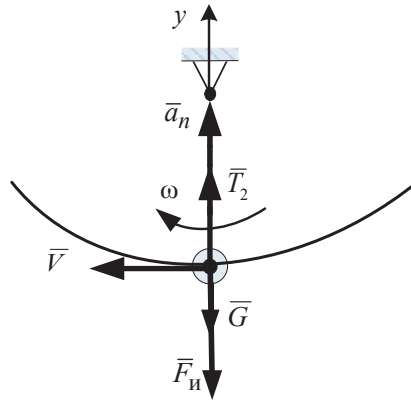


Рис. 1.85

$$\sum F_{ky} = 0; \quad T_2 = F_{\text{и}} - G = 0;$$

$$T_2 = F_{\text{и}} + G = m(a_n + g) = 1,0(31,55 + 9,81) = 41,36 \text{ Н.}$$

Глава 2.

Основы расчетов элементов конструкций на прочность и жесткость

2.1. Задачи и методы расчета

Различные конструкции, детали и машины помимо других качеств должны обладать способностью сопротивляться разрушению под действием приложенных к ним внешних сил. Изложение методов расчета элементов конструкций на прочность составляет первую задачу курса сопротивления материалов.

Кроме этого, во многих случаях при решении конкретных инженерных задач приходится определять деформации, т. е. изменения формы и размеров элементов конструкций, которые возникают при действии нагрузок. Как известно, абсолютно твердых, т. е. недеформируемых, тел в природе не существует. Небольшие деформации не оказывают заметного влияния на законы равновесия и движения тела, вследствие чего в курсах теоретической механики и теории механизмов и машин ими пренебрегают. Однако без учета деформаций невозможно решить важнейшую практическую задачу о том, при каких условиях может произойти разрушение конструкции. Кроме этого, величину деформации во многих случаях приходится ограничивать, так как в противном случае нормальная эксплуатация конструкций может оказаться невозможной.

Способность элементов конструкции сопротивляться деформации под действием внешних сил называется **жесткостью**. Таким образом, изложение методов расчета конструкций на жесткость составляет вторую задачу курса сопротивления материалов.

Третья задача курса связана с изучением устойчивости форм равновесия деформирующихся тел. Под устойчивостью понимают способ-

ность элемента сопротивляться возникновению больших отклонений от невозмущенного равновесия при малых возмущающих воздействиях, т. е. при малом изменении нагрузки. Состояние устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформации. И наоборот, равновесие будет неустойчиво, если небольшой рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций. Примером неустойчивого равновесия является осевое сжатие тонкого стержня.

Геометрическая форма элементов конструкций и деталей может быть весьма сложной. Учет всех геометрических особенностей детали при расчете часто бывает невозможным либо нецелесообразным. На практике для оценки прочности вводят упрощение в геометрическую форму и представляют деталь в виде стержня, пластинки, оболочки или массива. Стержнем или брусом называют тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной. Стержень может иметь постоянное или переменное сечение. В дальнейшем в основном будем рассматривать стержни с прямолинейной осью. Пластинкой называют тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, имеющее малую толщину по сравнению с радиусом или длиной. Оболочка — тело, ограниченное двумя неплоскими поверхностями, имеющее малую толщину по сравнению с радиусом кривизны и длиной (например, тонкостенный цилиндр). Массивом будем называть модель, три размера которой соизмеримы (например, зуб зубчатого колеса).

2.2. Допущения, принимаемые при расчетах на прочность

Для упрощения решения задач в курсе сопротивления материалов принимаются некоторые упрощающие допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия деталей и внешних сил, которые вносят в результат решения незначительные погрешности, но при этом существенно облегчают и упрощают само решение [2, с. 8].

1. Материал имеет сплошное (непрерывное) строение. Это допущение приемлемо для большинства машиностроительных материалов, так как они имеют настолько мелкозернистую структуру, что можно считать их строение сплошным.

2. Материал детали однороден, т. е. обладает во всех точках одинаковыми свойствами. Все металлы и сплавы обладают высокой од-

нородностью. Менее однородны дерево, бетон, пластические массы с наполнителем.

3. Материал считается изотропным, т. е. обладающим одинаковыми свойствами во всех направлениях. У материалов с мелкозернистой структурой кристаллы расположены хаотично и свойства в разных направлениях выравниваются, поэтому эти материалы практически изотропны.

4. В теле до приложения внешних нагрузок отсутствуют внутренние усилия. В дальнейшем под внутренними усилиями будем понимать внутренние силы упругости, которые сопротивляются разрушению и деформации, не принимая во внимание молекулярные силы, которые имеются в ненагруженном теле.

5. Результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, приложенных к телу последовательно в произвольном порядке. Под результатом воздействия в зависимости от конкретной задачи будем понимать деформации, внутренние усилия или перемещения отдельных точек.

6. Принцип Сен-Венана. В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок. Этот принцип позволяет производить замену одной системы сил другой, ей эквивалентной. В частности, распределенную нагрузку мы будем заменять сосредоточенной силой, модуль которой равен равнодействующей распределенной нагрузки.

2.3. Классификация внешних нагрузок

Нагрузки, действующие на части машин и сооружений, представляют собой силы или пары сил (моменты), которые могут рассматриваться как сосредоточенные и распределенные.

Следует отметить, что в природе сосредоточенных сил не бывает, так как через точку невозможно передать даже незначительное усилие. Все реальные силы распределены по некоторой длине, площади либо объему. Однако для определения внутренних усилий, возникающих на некотором расстоянии от площади передачи давления, на основании принципа Сен-Венана распределенную нагрузку можно заменить сосредоточенной равнодействующей, что упростит расчет.

Сосредоточенные нагрузки выражаются в ньютонах (Н), килоньютонах (кН), меганьютонах (МН).

Распределенные нагрузки выражаются в единицах силы, отнесенных к единице длины, либо к единице площади, либо к единице объема. Равномерно распределенная нагрузка по длине (погонная нагрузка) обозначается ее интенсивностью q и выражается в ньютонах на метр (Н/м), распределенная нагрузка по площади — в ньютонах на квадратный метр (Н/м²).

И сосредоточенные и распределенные нагрузки могут быть статическими и динамическими. Статическими называются нагрузки, которые изменяют свою величину, или точку приложения, или направление с очень небольшой скоростью, поэтому возникающими при этом ускорениями можно пренебречь. При действии таких нагрузок колебания сооружений и их частей пренебрежимо малы. Динамическими называют нагрузки, изменяющие хотя бы один из трех параметров, определяющих силу, как вектор, во времени с большой скоростью. Действие таких нагрузок приводит к возникновению колебаний сооружений. При колебании масс, вследствие изменения скорости, возникают силы инерции, пропорциональные колеблющимся массам и ускорениям. Эти силы могут во много раз превосходить те же нагрузки, приложенные статически. К динамическим также относятся нагрузки, периодически изменяющиеся во времени.

Разделение нагрузок на статические и динамические связано с тем, что материалы различно сопротивляются этим видам нагрузок.

2.4. Основные виды деформаций

Деформации элементов сооружений и деталей машин, вызванные внешними силами, могут быть очень сложными. Однако эти сложные виды деформаций всегда можно представить состоящими из небольшого числа основных видов деформаций.

Основными видами деформаций элементов конструкций и деталей машин, изучаемых в курсе сопротивления материалов, являются:

- растяжение (см. рис. 2.1);
- сжатие (см. рис. 2.2);
- сдвиг (срез) (см. рис. 2.3);

- кручение (рис. 2.4);
- изгиб (рис. 2.5).



Рис. 2.1

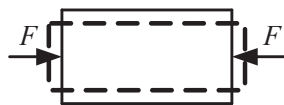


Рис. 2.2

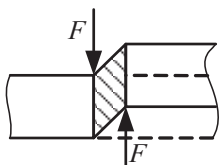


Рис. 2.3

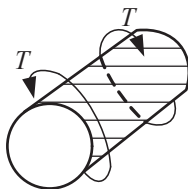


Рис. 2.4

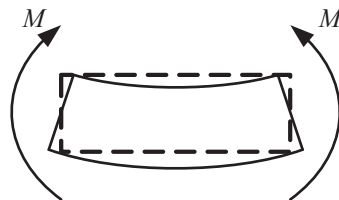


Рис. 2.5

Примерами сложных деформаций могут служить одновременные растяжения и изгиб или одновременные изгиб и кручение. В последующих главах будут рассмотрены перечисленные виды деформаций и разобраны методы определения величин напряжений и деформаций.

2.5. Метод сечений. Напряжение

Внешние силы, действующие на тело, вызывают появление в нем внутренних сил упругости. Если внешние силы деформируют тело, то внутренние силы сопротивляются их воздействию и стремятся сохранить первоначальную форму и объем тела. При решении задач сопротивления материалов, связанных с расчетом на прочность и жесткость элементов конструкций, необходимо уметь определять внутренние силы и деформации, возникающие в этих элементах.

При определении внутренних сил в каком-либо сечении тела используют метод сечений. Это универсальный метод, который можно использовать при любом виде деформации, рассмотренном выше. Суть этого метода заключается в следующем. Рассмотрим тело, находящееся в состоянии равновесия под действием четырех сил F_1 , F_2 , F_3 , F_4 (см. рис. 2.6). Для определения внутренних сил, действующих в любом сечении, например $n-n$, мысленно разрежем тело по этому сечению и одну из частей отбросим (см. рис. 2.7). На оставшуюся часть

тела действуют силы F_1 и F_2 . Для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо по всему сечению приложить внутренние силы. Эти силы представляют действие отброшенной правой части на оставшуюся левую. Будучи внутренними для целого тела, они играют роль внешних сил для выделенной части.

Величина равнодействующей внутренних усилий определяется из условия равновесия оставшейся части тела при помощи уравнений статики.

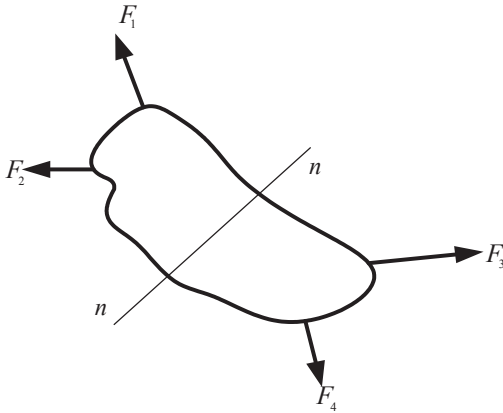


Рис. 2.6

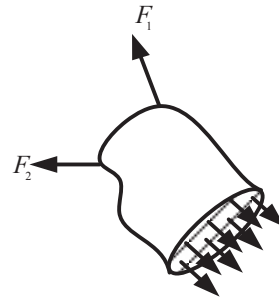


Рис. 2.7

Метод сечений позволяет определить только сумму внутренних сил, действующих в интересующем нас сечении. Сумма этих сил может приводиться к одной силе, к паре сил или в общем случае — к силе и паре сил. Закон распределения внутренних усилий по сечению, как правило, неизвестен. Для решения этого вопроса необходимо знать в каждом конкретном случае, как деформируется данное тело под действием внешних сил. Таким образом, в поперечном сечении нагруженного внешними силами тела действуют непрерывно распределенные усилия, интенсивность которых может быть различной в разных точках сечения и в разном направлении.

Если в сечении выделить бесконечно малую площадку ΔA и обозначить равнодействующую внутренних сил, действующих на эту площадку, ΔR , то отношение силы ΔR к величине выделенной площадки ΔA даст среднее напряжение на этой площадке:

$$p_m = \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Таким образом, чтобы получить истинное напряжение или просто напряжение в данной точке, необходимо уменьшить до бесконечности размеры площадки:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Упрощенно можно сказать, что напряжением называется внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке данного сечения.

Напряжение выражают в ньютонах на квадратный метр. Эта величина называется паскаль: $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$. В технике часто применяют единицу измерения напряжения, которая носит название мегапаскаль. Один мегапаскаль равен миллиону паскалей: $10^6 \text{ Па} = \text{МПа}$.

Полное напряжение p можно разложить на две составляющие: нормальную к плоскости сечения, она обозначается σ и называется нормальным напряжением; вторая составляющая лежит в плоскости сечения, она обозначается τ и называется касательным напряжением (рис. 2.8). Касательное напряжение может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства τ представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей (рис. 2.9).

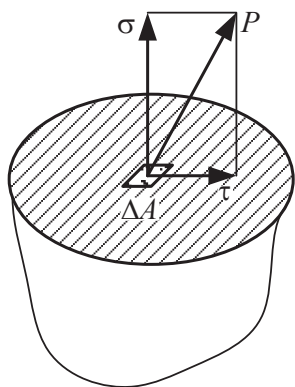


Рис. 2.8

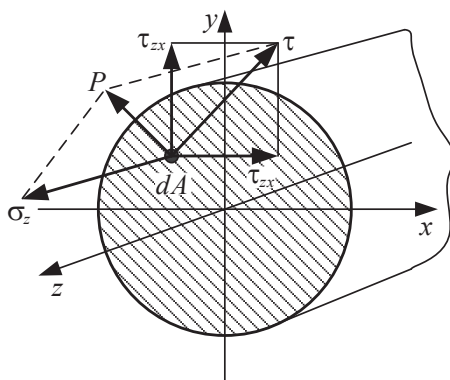


Рис. 2.9

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой из осей параллельно это напряжение. Растягивающие нормальные напряжения принято считать положительными, сжимающие — отрицательными. Касательные напряжения снабжены двумя индексами.

Первый показывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения; второй — какой оси параллельно само напряжение.

Очевидно, что полное напряжение можно выразить через σ и τ :

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Полное напряжение не считается удобной мерой интенсивности внутренних усилий, так как материалы по-разному сопротивляются действию нормальных и касательных напряжений. Нормальные напряжения (см. рис. 2.8) стремятся сблизить либо удалить отдельные части тела. Действие касательных напряжений (см. рис. 2.9) приводит к сдвигу одних частиц относительно других в плоскости сечения.

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рис. 2.10. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, проведенных через какую-либо точку тела, называется напряженным состоянием в данной точке.

Если по граням кубика действуют только нормальные напряжения, то они называются главными, а площадки, на которых они действуют, — главными площадками. Можно доказать, что в каждой точке напряженного тела существуют три главные взаимно перпендикулярные площадки. Главные напряжения обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом с учетом знака напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (рис. 2.11).

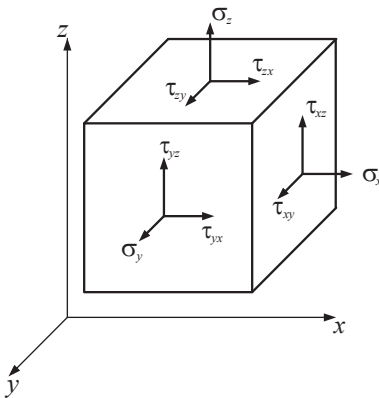


Рис. 2.10

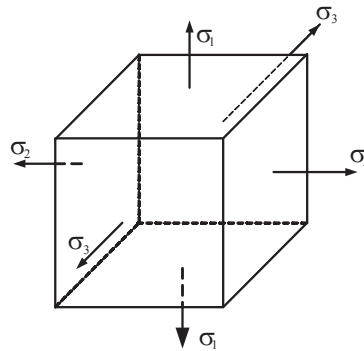


Рис. 2.11

Различные виды напряженного состояния классифицируются в зависимости от числа возникающих главных напряжений. Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется трехосным или объемным. Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется двухосным или плоским. Если равны нулю два главных напряжения, то напряженное состояние одноосное или линейное [2, с. 20].

Зная напряженное состояние в любой точке тела, можно оценить его прочность. В простейших случаях оценка прочности детали производится по наибольшему нормальному либо по наибольшему касательному напряжению.

Условие прочности в этих случаях выразится неравенствами:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} \leq [\tau],$$

где $[\sigma]$, $[\tau]$ — допускаемые нормальные и касательные напряжения соответственно.

В более сложных случаях оценка прочности производится по приведенному напряжению в соответствии с одной из теорий прочности.

2.6. Осевое растяжение и сжатие прямолинейного стержня

2.6.1. Построение эпюр продольных сил

Рассмотрим случай осевого растяжения или сжатия, при котором внешние силы действуют по оси стержня. Для определения внутренних усилий (продольных осевых сил) применим метод сечений. Вначале определим реакцию связи R_A .

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_A - 7F + 2F = 0 \rightarrow R_A = 7F - 2F = 5F.$$

Проводим сечение $n-n$, отбрасываем верхнюю часть и рассматриваем равновесие оставшейся части (см. рис. 2.12). Воздействие отброшенной части заменяем внутренним усилием N_1 . Под действием двух

внешних сил $7F$ и $2F$ и внутреннего усилия N_1 оставшаяся часть бруса будет находиться в равновесии. Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось и находим N_1 :

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N_1 - 7F + 2F = 0; \quad N_1 = 7F - 2F = 5F.$$

Таким образом, в сечении $n-n$ действует растягивающее усилие, величина которого равна $5F$. Очевидно, что такой же результат получится, если сечение провести в любом месте на участке от точки приложения силы $7F$ до точки A . Рассуждая аналогичным образом, определим внутреннее усилие в сечении $m-m$. В этом сечении действует сжимающее усилие, равное $2F$. Принято растягивающее усилие считать положительным, а сжимающее — отрицательным.

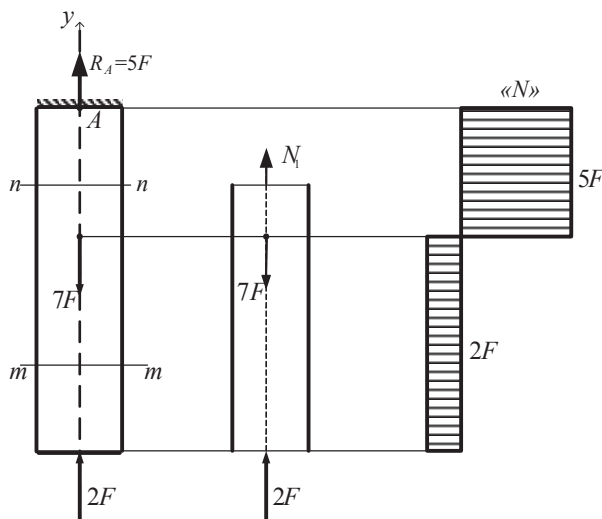


Рис. 2.12

Построим график изменения продольных сил по оси стержня. Базовую ось графика проводим параллельно оси стержня, а значения продольных сил откладываем перпендикулярно оси в выбранном масштабе. Положительные значения откладывают вправо либо вверх, если ось горизонтальная, отрицательные значения — влево либо вниз. Такой график называется эпюрой продольных сил. Этими же правилами будем пользоваться при построении эпюр различных величин, таких как напряжения, крутящие моменты, перемещения и т. д.

2.6.2. Определение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня

Нанесем на поверхность призматического стержня линии перпендикулярные и параллельные оси и приложим к нему растягивающую осевую силу F (рис. 2.13).

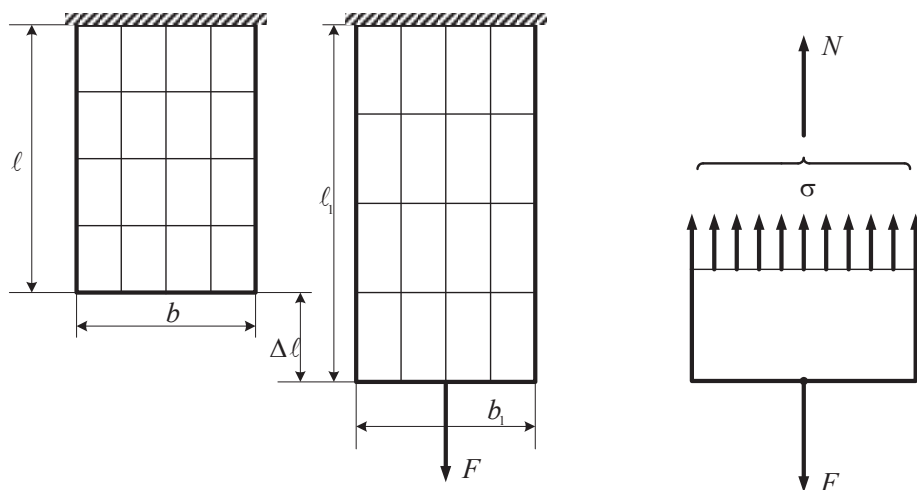


Рис 2.13

Можно заметить, что после деформации линии, нанесенной на стержень, сетки останутся взаимно перпендикулярными, а расстояние между горизонтальными линиями увеличится, при этом они останутся прямыми. Поскольку горизонтальные линии представляют собой след секущей плоскости, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, остались плоскими и нормальными к оси и после деформации. Это очень важная гипотеза сопротивления материалов, которая носит название гипотезы плоских сечений или гипотезы Бернулли.

На основании гипотезы Бернулли можно сделать вывод о том, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, в противном случае горизонтальные линии не сохраняли бы прямолинейность и не были бы нормальными к оси. Касательные напряжения в этих сечениях отсутствуют, так как углы сетки остались прямыми, что свидетельствует об отсутствии сдвига слоев материала стержня.

Продольная сила N является равнодействующей нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (2.1)$$

Поскольку $\sigma = \text{const}$, то $N = \sigma A$, откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) применяется и при сжатии с той лишь разницей, что сжимающие напряжения считаются отрицательными.

2.6.3. Определение деформаций

Для большинства конструкционных материалов при нагружении до определенных значений напряжений справедлива следующая зависимость между деформацией стержня и нормальным напряжением:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.3)$$

где ε — относительное удлинение стержня; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}$; Δl — абсолютное удлинение стержня; l — длина образца до деформации; l_1 — длина образца после деформации (см. рис. 2.13).

Зависимость (2.3) носит название **закона Гука** и формулируется следующим образом: **линейные деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям.**

Коэффициент E , зависящий от материала, называется модулем продольной упругости, или модулем упругости первого рода. Он характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться деформации. Поскольку ε — величина безразмерная, то единица измерения модуля продольной упругости E та же, что и у напряжения σ , т. е. паскаль. В табл. 2.1 приведены значения E для некоторых материалов [2, с. 25].

Таблица 2.1

Материал	E , МПа	Материал	E , МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5 \dots 2,2 \cdot 10^5$	Бронза	$1,2 \cdot 10^5$
Медь	$1 \cdot 10^5$	Титан	$1 \cdot 10^5$
Чугун	$0,75 \cdot 10^5 \dots 1,6 \cdot 10^5$	Дерево	$1 \cdot 10^5$
Алюминий	$0,675 \cdot 10^5$	Стеклопластики	$0,18 \cdot 10^5 \dots 0,4 \cdot 10^5$

Поскольку $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{N}{A}$, из формулы (2.3) получаем выражение для определения абсолютного удлинения или укорочения стержня длиной l :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.4)$$

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (2.5)$$

где ε' — относительное поперечное сужение стержня. Коэффициент μ называется коэффициентом Пуассона или коэффициентом поперечной деформации. Значение μ для различных материалов колеблется в пределах от 0 до 0,5. Для всех марок сталей можно принимать значение $\mu = 0,3$. Поскольку $\mu' = \frac{\Delta b}{b}$, то полное поперечное сужение (при растяжении) или уширение (при сжатии) определяется по формуле

$$\Delta b = b - b_1,$$

где Δb — абсолютная поперечная деформация; b — первоначальный поперечный размер; b_1 — поперечный размер стержня после деформации.

В практике часто встречаются стержни переменного сечения, в основном — ступенчатые. У таких стержней полное изменение длины определяется как алгебраическая сумма деформаций его отдельных частей, в пределах которых величины E , N и A постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$

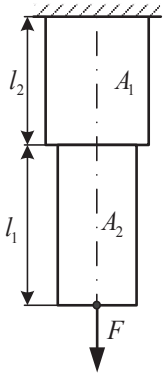


Рис. 2.14

В частности, для приведенной на рис. 2.14 схемы полное удлинение ступенчатого стержня определится как сумма деформаций двух участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{F}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right),$$

$$\text{т. к. } N_1 = N_2 = F.$$

2.6.4. Статически неопределимые задачи при осевом растяжении или сжатии

Определить реакции и усилия в частях бруса l_1 и l_2 (рис. 2.15). Сила F растягивает верхнюю часть бруса и сжимает нижнюю. Обозначим реакции заделки R_A и R_B .

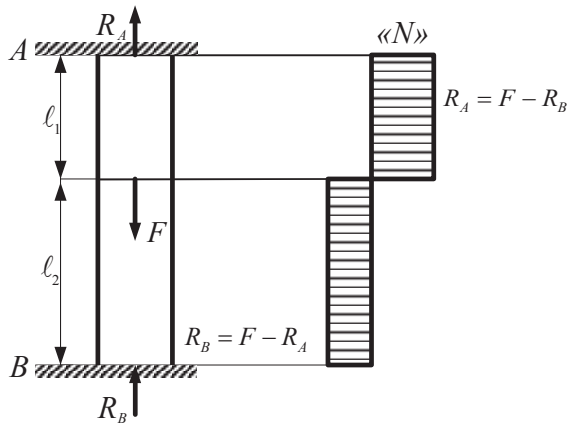


Рис. 2.15

Уравнение равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A + R_B - F = 0;$$

$$R_A + R_B = F.$$

Рассмотрим деформации. Поскольку концы бруса защемлены, то удлинение верхней части равно укорочению нижней, следовательно, $\frac{R_A l_1}{EA} = \frac{R_B l_2}{EA}$ или $\frac{R_A}{R_B} = \frac{l_2}{l_1}$, т. е. реакции обратно пропорциональны длинам l_1 и l_2 . Решаем это уравнение совместно с уравнением статики:

$$\begin{aligned} R_A &= R_B \frac{l_2}{l_1}; & R_B \frac{l_2}{l_1} + R_B &= F; & R_B \left[1 + \frac{l_2}{l_1} \right] &= F; & R_B \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} \right) &= F; \\ R_B &= F \frac{l_1}{l_1 + l_2}; & R_A &= R_B \frac{l_2}{l_1} = F \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = F \frac{l_2}{l_1 + l_2}. \end{aligned}$$

2.7. Механические испытания свойств материалов

2.7.1 Диаграмма растяжения

Для изучения свойств материалов и установления значений предельных напряжений проводят испытания образцов материалов вплоть до разрушения.

По виду деформации, испытываемой образцом, различают испытания на растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Реже проводят испытания на сложное сопротивление.

Поскольку результаты испытаний зависят от формы образца, скорости его деформирования, температуры и других факторов, то эксперимент проводят в условиях, предусмотренных ГОСТом. Испытания проводят на специальных машинах. Наибольшее распространение имеют испытания на растяжение статической нагрузкой, т. к. они наиболее просты и в то же время во многих случаях дают возможность достаточно верно судить о поведении материала при других видах деформаций. Для испытаний на растяжение применяют цилиндрические или плоские образцы. В качестве основных используются цилиндрические образцы диаметром $d_0 = 10$ мм, длиной $l_0 = 5,65\sqrt{A} = 50$ мм (короткие) либо $l_0 = 11,3\sqrt{A} = 100$ мм (длинные).

Целью испытаний на растяжение является определение механических характеристик материала. При испытании автоматически изо-

ональности — это наибольшее напряжение, до которого деформации в материале растут пропорционально напряжениям. Если взять какое-нибудь состояние образца в пределах прямолинейного участка деформации, например M , то тангенс угла наклона линии OA к оси абсцисс можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E. \quad (2.6)$$

Модуль упругости первого рода может быть определен как тангенс угла наклона прямолинейного участка OA к оси абсцисс.

За точкой A диаграмма становится криволинейной. Однако если величина напряжений не превысит некоторого значения σ_y , соответствующего точке K , то материал сохраняет свои упругие свойства и при разгрузке образец восстанавливает свою форму и размеры. Это напряжение называется пределом упругости. Разница между $\sigma_{пр}$ и σ_y на практике невелика и обычно между ними не делают различия. Например, для стали Ст3 эти величины соответственно равны 210 МПа и 220 МПа.

При дальнейшем увеличении нагрузки за пределом упругости, начиная с точки C , деформации начинают расти без увеличения напряжений. Это явление называется текучестью материала. Горизонтальный участок диаграммы CD называется площадкой текучести. Напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки, называется пределом текучести и обозначается σ_T . Для стали Ст3 предел текучести равен 230 МПа. Напряжения выше предела текучести вызывают в деталях недопустимые остаточные деформации. Если от какой-нибудь точки n диаграммы (см. рис. 2.16), лежащей выше площадки текучести, произвести разгрузку образца, то линия разгрузки nF будет прямой, параллельной OA . Отрезок OF представляет величину пластической деформации, которая останется в образце после разгрузки.

Ряд материалов, таких как легированные стали, не имеют ярко выраженной площадки текучести, и для них устанавливается так называемый условный предел текучести. Напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2 %, называется условным пределом текучести и обозначается $\sigma_{0,2}$.

После перехода площадки текучести материал снова приобретает способность сопротивляться деформированию. Диаграмма за точ-

кой D вновь поднимается вверх, хотя и менее интенсивно, чем в зоне упругих деформаций. Точка B диаграммы соответствует наибольшему напряжению, которое называется пределом прочности или временным сопротивлением. Обозначается предел прочности σ_B или $\sigma_{вч}$. Для стали Ст3 $\sigma_B = 380$ МПа. У высокопрочных легированных сталей σ_B достигает 1700 МПа.

После перехода предела прочности на образце появляется местное сужение — шейка. Площадь сечения шейки быстро уменьшается, вследствие чего деформация образца происходит при уменьшающихся нагрузке и соответственно напряжении. При напряжении, соответствующем точке B , образец разрывается.

Для изготовления деталей и элементов конструкций применяют пластичные и хрупкие материалы. Под пластичностью понимают способность материала получать большие остаточные деформации без разрушения. В качестве мер пластичности в технике используют относительное остаточное удлинение образца после разрыва δ и относительное остаточное уменьшение площади поперечного сечения в шейке после разрыва ψ :

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0}; \quad \psi = \frac{A_0 - A_p}{A_0}, \quad (2.7)$$

где l_p — длина образца после разрыва, составленного из двух частей; l_0 — длина образца до испытания; A_p — площадь сечения в шейке; A_0 — площадь поперечного сечения образца до испытания. Для стали Ст3 значение ψ составляет 50–60 %.



Рис. 2.17

Хрупкостью называется свойство материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Для таких материалов удлинение при разрыве составляет менее 5 %. Это свойство противоположно пластичности. Для сравнения на рис. 2.17 приведены условные диаграммы растяжения для пластичного (малоуглеродистая сталь) и хрупкого (чугун) материалов.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, т. к. в зависимости от температуры, скорости деформирования, напряженного состояния и других факторов пластичность изменяется. При изготовлении деталей в практике широко используется термическая обработка, которая позволяет изменять свойства материалов для улучшения эксплуатационных характеристик деталей. В частности, закалка резко повышает прочность стали и одновременно снижает ее пластические свойства.

2.7.2. Твердость

Для определения механических характеристик готовых деталей невозможно использовать разрушающие методы контроля, к которым относится испытание на растяжение и ряд других. В производстве для проведения оперативного контроля применяются методы определения твердости.

Твердость — это свойство материала оказывать сопротивление внедрению в него другого, более твердого тела. Твердость тесно связана с показателями прочности и пластичности. Для определения твердости существует несколько способов, наиболее распространенные из которых — пробы по Бринеллю (НВ) и Роквеллу (HR). При определении твердости по Бринеллю в поверхность материала детали вдавливается стальной шарик (рис. 2.18) и по величине отпечатка определяют число твердости. Во втором случае в материал вдавливается алмазный конус. Твердость по Бринеллю определяют вдавливанием в испытываемый материал закаленного шарика диаметром $D = 10$ мм силой $F = 30$ кН. Число единиц твердости по Бринеллю НВ равно отношению силы F , вдавливающей шарик, к площади поверхности полученного отпечатка:

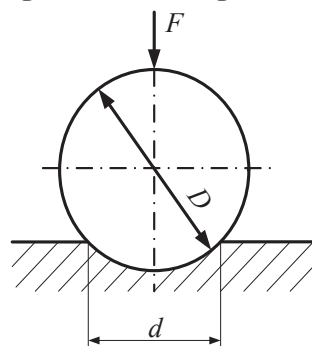


Рис. 2.18

$$HB = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}. \quad (2.8)$$

Для сталей зависимость между числом единиц твердости по Бринеллю НВ и пределом прочности с достаточной степенью точности определяется формулой:

$$\sigma_B \approx 0,36 \text{ HB.} \quad (2.9)$$

Зависимость между твердостью по Бринеллю и Роквеллу:

$$\text{HB} \approx 10 \text{ HR.} \quad (2.10)$$

2.7.3. Определение допускаемых напряжений и коэффициента запаса прочности

Прочность, т. е. способность материала оказывать сопротивление механическим усилиям, является важнейшим критерием работоспособности элементов конструкций и деталей. Обычно под прочностью понимают сопротивление разрушению или пластическим деформациям.

Деформации определяются напряжениями. Расчетные напряжения должны быть такими, чтобы обеспечивалась прочность детали при минимальной затрате материала. Наиболее распространенным методом оценки прочности является сравнение расчетных напряжений, возникающих в деталях при действии эксплуатационных нагрузок с допускаемыми напряжениями. Условие прочности по допускаемому напряжению имеет вид:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.11)$$

где σ_{\max} — наибольшее напряжение в детали от наибольшей ожидаемой нагрузки; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Аналогичное условие прочности можно записать и для касательных напряжений.

Определение допускаемого напряжения является важным этапом расчета и проектирования, т. к. при большом значении $[\sigma]$ возможно разрушение детали, а заниженные значения $[\sigma]$ приводят к тому, что деталь получается тяжелой и более дорогой. Допускаемые нормальные $[\sigma]$ и касательные $[\tau]$ напряжения при статических нагрузках и отсутствии концентрации напряжений определяют по формулам:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[s]}, \quad (2.12)$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ и $M_{i_{x+dx}} = R_A(x+dx) - F_1(x+dx - \alpha_1) + F_2(x+dx - \alpha_2)$ — предельные значения напряжений, при которых деталь выходит из строя; $[s]$ — требуемый, заданный или нормативный коэффициент запаса прочности.

Распространенным методом оценки прочности является также сравнение действительного коэффициента запаса прочности s с допускаемым $[s]$. В этом случае условие прочности выражается неравенством

$$s \geq [s]. \quad (2.13)$$

Расчет по допускаемым напряжениям обычно выполняют как проектный, служащий для определения размеров детали. Например, диаметр стержня, нагруженного внешней растягивающей силой F , можно определить из условия прочности следующим образом:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq [\sigma]_p. \quad (2.14)$$

Откуда:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma]_p}}, \quad (2.15)$$

где $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение при растяжении.

Расчет по запасу прочности выполняется как проверочный, уточненный на той стадии, когда уже имеется чертеж детали и можно учесть концентраторы напряжений, обработку поверхности, размеры поперечных сечений и т. д.

Напряжения, возникающие в элементах конструкций, могут быть постоянными и переменными во времени. При расчетах на прочность при постоянных напряжениях детали из пластичных материалов в качестве предельного напряжения принимают предел текучести σ_T или τ_T .

При расчетах на прочность при постоянных напряжениях деталей из хрупких материалов в качестве предельного напряжения принимают соответствующий предел прочности σ_b .

При расчетах на прочность деталей при переменных напряжениях в качестве предельного принимают соответствующий предел выносливости σ_R . Под пределом выносливости понимают наибольшее переменное напряжение, при действии которого не происходит разрушение образца после произвольно большого количества циклов нагружений. Для выбора допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности пользуются двумя методами: табличным и дифференциальным.

Табличный метод проще и удобнее для пользования. Поэтому во всех случаях, когда имеются специализированные таблицы допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности, составленные для отдельных узлов и деталей машин, обычно используется этот метод. Например, для валов передач средних размеров $[s]$ принимают равным 1,5.

Дифференциальный метод заключается в том, что допускаемое напряжение или допускаемый коэффициент запаса прочности определяют по соответствующей формуле, которая учитывает различные факторы, влияющие на прочность рассчитываемой детали или конструкции. Допускаемый коэффициент запаса прочности $[s]$ рекомендуется определять по формуле:

$$[s] = [s_1] \cdot [s_2] \cdot [s_3].$$

Здесь $[s_1]$ — учитывает точность определения действующих на конструкцию внешних нагрузок и возникающих в ней напряжений. $[s_1] = 1$ при точных расчетах; $[s_1] = 1,2 \dots 1,6$ при расчетах средней точности;

$[s_2]$ — учитывает однородность материала детали. $[s_2] = 1,2 \dots 1,5$ для деталей из поковок и проката; $[s_2] = 1,5 \dots 1,8$ для деталей из стального литья; $[s_2] = 1,5 \dots 2,5$ для чугунных деталей;

$[s_3]$ — коэффициент безопасности детали. $[s_3] = 1 \dots 1,5$ — большие значения принимают для дорогостоящих и ответственных деталей, поломка которых может привести к серьезной аварии.

2.8. Сложное напряженное состояние

2.8.1. Напряжения в наклонных площадках при осевом растяжении или сжатии

При растяжении прямого бруса в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, определяемые по формуле:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Для определения напряжений в наклонных сечениях при растяжении в одном направлении проведем наклонное сечение под углом α (рис. 2.19).

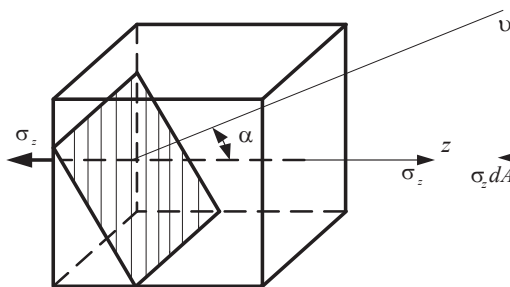


Рис. 2.19

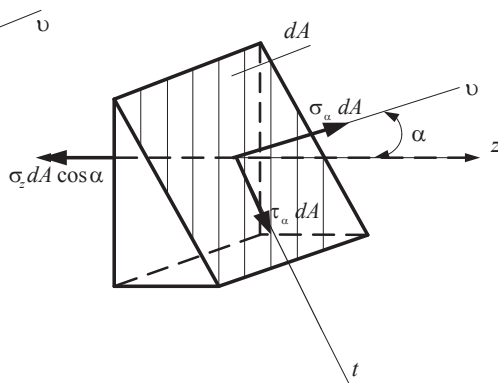


Рис. 2.20

Составим уравнение равновесия элементарной трехгранной призмы (рис. 2.20). Площадь наклонной грани dA .

$$\sum F_v = 0; \quad -\sigma_z \cdot dA \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_\alpha dA = 0,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha. \quad (2.16)$$

$$\sum F_t = 0; \quad -\sigma_z \cdot dA \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \tau_\alpha dA = 0,$$

откуда

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma_z \cdot \sin 2\alpha. \quad (2.17)$$

Выводы:

- Наибольшее нормальное напряжение возникает в поперечном сечении бруса: $\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha=0} = \sigma_z$.
- Наибольшее касательное напряжение возникает на площадке, наклоненной под углом $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$ к оси бруса, и равно половине нормального напряжения, возникающего в соответствующей точке поперечного сечения: $\tau_{\max} = \tau_{\alpha=45^\circ} = 0,5\sigma_z$.

2.8.2. Напряжения на взаимно-перпендикулярных площадках

Определим нормальные и касательные напряжения на взаимно-перпендикулярных площадках (рис. 2.21).

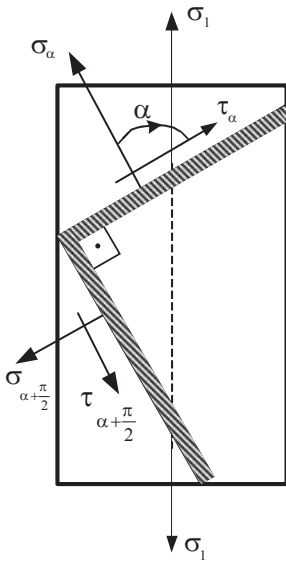


Рис. 2.21

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha} &= 0,5\sigma_z \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Для взаимно-перпендикулярной площадки:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} &= 0,5\sigma_1 \cdot \sin 2\alpha \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -0,5\sigma_1 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать выводы:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_1. \quad (2.20)$$

Сумма нормальных напряжений на двух взаимно-перпендикулярных площадках постоянна и равна главному напряжению.

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, \quad (2.21)$$

т. е. на двух взаимно-перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения (закон парности касательных напряжений).

2.8.3. Определение напряжений в наклонных сечениях при растяжении или сжатии по двум взаимно-перпендикулярным направлениям

При плоском напряженном состоянии $\sigma_1 > \sigma_2$.

Между направлением σ_2 и площадкой угол равен $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.23).

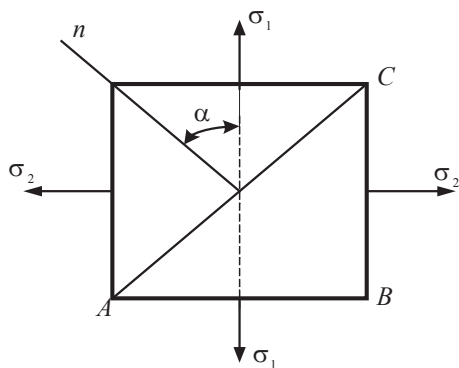


Рис. 2.22

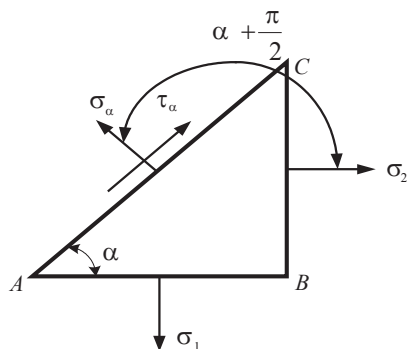


Рис. 2.23

Напряжения σ_α и τ_α в произвольном наклонном сечении можно определить из равновесия трехгранной призмы ABC (рис. 2.23) или по полученным формулам, суммируя напряжения от действия σ_1 и σ_2 (при замене угла α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$).

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.22)$$

откуда

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \quad (2.23)$$

$$\tau_{\alpha} = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha + 0,5\sigma_2 \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$\tau_{\alpha} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \quad (2.24)$$

Из формулы (2.24) видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2.25)$$

Они действуют в сечениях, одинаково наклоненных к направлениям σ_1 и σ_2 , т. е. при $\alpha = 45^\circ$ или $\alpha = 135^\circ$.

Для двухосного напряженного состояния сохраняет свою силу закон парности касательных напряжений.

2.8.4. Обобщенный закон Гука

Определим ε_1 и ε_2 — деформации в направлении главных напряжений при плоском напряженном состоянии (см. рис. 2.22). Для этого используем закон Гука для одноосного растяжения, а также зависимость между продольной и поперечной деформациями.

От действия только σ_1 происходит относительное удлинение в вертикальном направлении $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$, одновременно в горизонтальном направлении происходит относительное сужение $\varepsilon_{21} = -\mu \frac{\sigma_1}{E}$ (см. формулу (2.5)).

От действия только σ_2 в горизонтальном направлении относительное удлинение $\varepsilon_{22} = -\frac{\sigma_2}{E}$, а в вертикальном направлении относительное сужение $\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$.

Суммируя деформации, получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = -\frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{1}{E}(\sigma_2 + \mu\sigma_1) \end{aligned} \right\}. \quad (2.26)$$

Если известны деформации ε_1 и ε_2 , то:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)/(1 - \mu^2) \\ \sigma_2 &= E(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)/(1 - \mu^2) \end{aligned} \right\}. \quad (2.27)$$

Аналогично для объемного напряженного состояния:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\}. \quad (2.28)$$

Формулы (2.28) носят название обобщенного закона Гука, т. к. выражают зависимость между напряжениями и относительными деформациями упругого тела.

2.9. Геометрические характеристики плоских сечений

2.9.1. Статические моменты плоских сечений

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости необходимо уметь определять некоторые геометрические характеристики сечений, к которым относятся статические моменты, моменты инерции и моменты сопротивления.

Статическим моментом площади фигуры относительно оси x (рис. 2.24), взятой в той же плоскости, называется сумма произ-

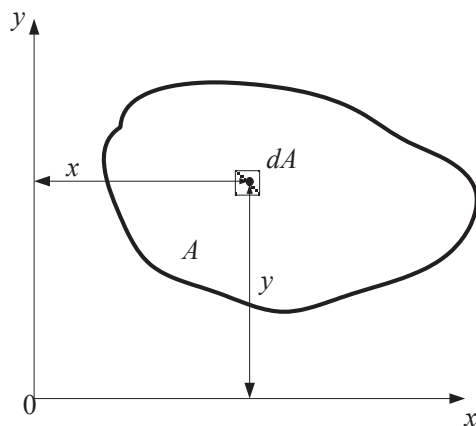


Рис. 2.24

ведений элементарных площадок dA фигуры на их расстояния до оси. Перейдя от суммы к интегралу, выразим статический момент относительно оси x :

$$S_x = \int_A y dA. \quad (2.29)$$

Статический момент относительно оси y можно записать в виде

$$S_y = \int_A x dA. \quad (2.30)$$

Рассматривая элементарную площадку как силу, а расстояние ее от оси — как плечо силы, на основании теоремы Вариньона (сумма моментов составляющих равна моменту равнодействующей) можно записать:

$$\begin{cases} S_x = Ay_c \\ S_y = Ax_c, \end{cases} \quad (2.31)$$

где x_c и y_c — координаты центра тяжести всей площади A относительно осей x и y . Следовательно, статический момент плоской фигуры относительно какой-либо оси равен произведению всей площади на расстояние ее центра тяжести от этой оси.

Если x и y проходят через центр тяжести фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются центральными. Размерность статического момента — метр кубический (м^3); он может быть как величиной положительной, так и отрицательной. Если сложная фигура может быть разбита на простые, площади и центры тяжести которых легко определяются (прямоугольники, треугольники, круги), то статический момент всей фигуры относительно какой-либо оси может быть определен как сумма статических моментов отдельных ее частей относительно той же оси:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \dots + S_{nx}, \quad (2.32)$$

где S_x — статический момент всей фигуры; $S_{1x}, S_{2x}, S_{3x}, \dots, S_{nx}$ — статические моменты отдельных частей фигуры.

Обозначим площади отдельных частей фигуры через $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, а расстояния их центров тяжести от оси x — через $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Запишем выражение (2.32) в следующем виде:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) y_c = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots + A_n y_n, \quad (2.33)$$

откуда расстояние центра тяжести всей фигуры от оси x определяется формулой:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}. \quad (2.34)$$

Аналогично вторую координату центра тяжести всей фигуры определим по формуле:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}. \quad (2.35)$$

2.9.2. Моменты инерции плоских сечений

Полярным моментом инерции сечения J_p называется сумма произведений элементарных площадок (dA) на квадраты их расстояний (ρ^2) до какого-либо полюса, лежащего в плоскости сечения, распространенная на всю площадь сечения (рис. 2.25):

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.36)$$

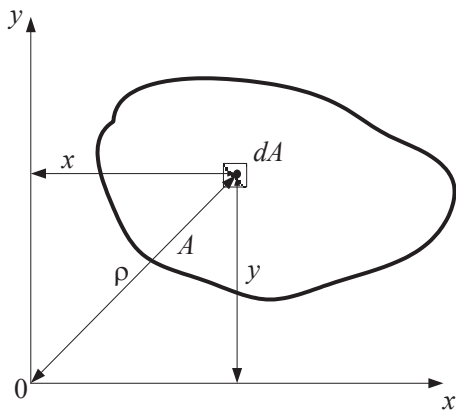


Рис. 2.25

Осевым моментом инерции площади сечения относительно какой-либо оси, лежащей в ее плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок на квадраты расстояний их до этой оси:

$$\begin{cases} J_x = \int_A y^2 dA \\ J_y = \int_A x^2 dA. \end{cases} \quad (2.37)$$

Из рис. 2.25 видно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$. Подставим это выражение в формулу (2.36) и получим:

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x. \quad (2.38)$$

Следовательно, сумма осевых моментов инерции плоского сечения относительно двух перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно полюса, представляющего точку пересечения этих осей.

Осевые и полярные моменты инерции измеряются в метрах в четвертой степени (м^4). Они всегда положительны и не могут быть равны нулю.

2.9.3. Моменты инерции простых плоских сечений

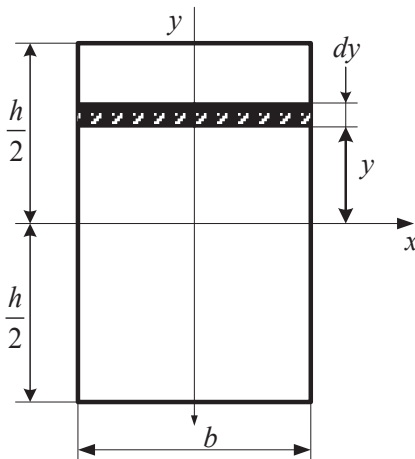


Рис. 2.26

Определим моменты инерции наиболее распространенных плоских сечений.

- **Прямоугольник** (рис. 2.26). Вычислим момент инерции сечения относительно оси x , проходящей через центр тяжести параллельно основанию. Выделим на расстоянии y от оси x бесконечно узкую площадку высотой dy , тогда $dA = b dy$. В соответствии с формулой (2.37):

$$J_x = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.39)$$

Аналогично находим осевой момент инерции относительно оси y :

$$J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.40)$$

Для квадратного сечения со стороной a :

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}. \quad (2.41)$$

• **Круг радиуса r** (рис. 2.27). Определим вначале полярный момент инерции относительно центра круга. За dA примем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$ и радиусом ρ , тогда $dA = 2\pi\rho d\rho$. Подставим это значение в формулу (2.36):

$$J_p = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (2.42)$$

Определим теперь осевые моменты инерции. Согласно формуле (2.38) для круглого сечения $J_p = 2J_x = 2J_y$, следовательно:

$$J_x = J_y = 0,5J_p = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4. \quad (2.43)$$

• **Кольцо** (рис. 2.28). Воспользуемся формулой (2.42), приняв пределы интегрирования от R до r .

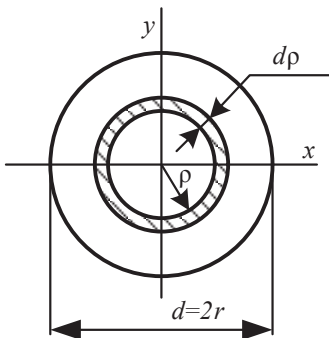


Рис. 2.27

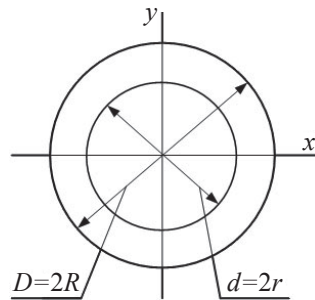


Рис. 2.28

$$J_p = 2\pi \int_r^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left(\frac{R^4}{4} - \frac{r^4}{4} \right) = 2\pi \left(\frac{D^4}{64} - \frac{d^4}{64} \right) = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

Обозначим отношение $d/D = \alpha$. Тогда:

$$\sigma_{\text{ПР}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.44)$$

Аналогично сплошному сечению определим осевой момент инерции кольца:

$$J_x = J_y = 0,5J_p = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4). \quad (2.45)$$

2.9.4. Центробежный момент инерции

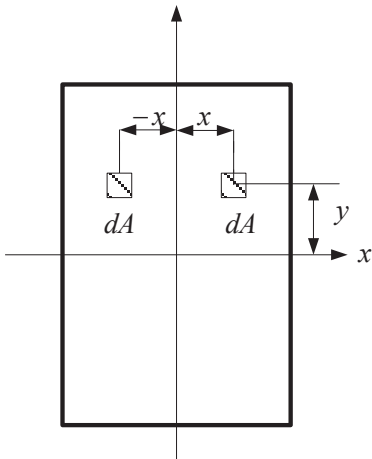


Рис. 2.29

Центробежным моментом инерции называется сумма произведений элементарных площадок на их координаты, распространенная на всю площадь сечения (рис. 2.29)

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.46)$$

Центробежный момент инерции имеет размерность — метр в четвертой степени (м^4) и может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

Если взаимно перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.

2.9.5. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов ее составных частей:

$$J_x = J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} + \dots + J_{nx}, \quad (2.47)$$

где $J_{1x}, J_{2x}, J_{3x}, \dots, J_{nx}$ — моменты инерции частей сложной фигуры относительно оси x .

Выражение (2.47) следует из свойства определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \int_{A_3} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA,$$

где A — площадь всей фигуры; $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ — площади каждой части фигуры.

Таким образом, для вычисления момента инерции сложного поперечного сечения его необходимо разбить на ряд простых фигур, вычислить момент инерции относительно оси каждой фигуры и затем все моменты инерции просуммировать. Для определения осевого момента инерции сложного по конфигурации поперечного сечения необходимо иметь формулу перехода для моментов инерции при параллельном переносе оси.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными осями, а момент инерции, определенный относительно центральной оси, называется центральным моментом инерции.

Положим, что x — центральная ось, момент инерции относительно которой J_x нам известен. Определим момент инерции J_{x_1} фигуры относительно оси x_1 , параллельной центральной и отстоящей от нее на расстоянии a (см. рис. 2.30):

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA.$$

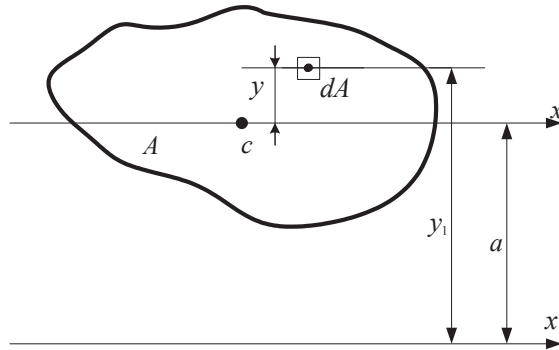


Рис. 2.30

Расстояния всех элементарных площадок dA от оси x_1 будет больше на постоянную величину a , т. е. $y_1 = y + a$.

$$J_{x_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Первый интеграл представляет собой центральный момент инерции. Второй интеграл равен нулю, так как это статический момент площади фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести c . Третий интеграл равен $a^2 A$. Следовательно,

$$J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot A. \quad (2.48)$$

Формула (2.48) широко применяется в практике и читается следующим образом: момент инерции сечения относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно центральной оси, ей параллельной, и произведению площади всего сечения на квадрат расстояния между осями.

Отметим, что моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и др.) приведены в таблицах сортамента.

2.10. Сдвиг и кручение

2.10.1. Определение напряжений и деформаций при сдвиге

Если на брус действуют перпендикулярно его оси две равные по модулю силы F , направленные в противоположные стороны и имеющие небольшое расстояние между линиями их действия, то при достаточной величине этих сил происходит срез (рис. 2.31). Две части бруса отделяются одна от другой по линии $n-n$. Характерным для среза является близость расположения сил F , как это бывает у ножниц при разрезании, например, листа металла.

Деформация, которая предшествует срезу, называется сдвигом. Эта деформация заключается в изменении прямых углов элементарного прямоугольника $abcd$, который после сдвига трансформируется в параллелепипед $abc'd'$ (рис. 2.32).

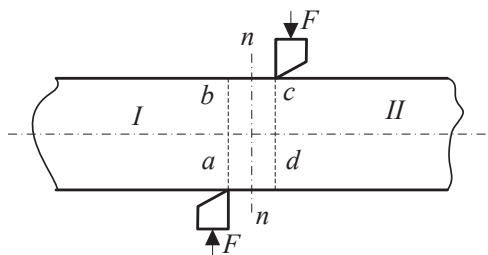


Рис. 2.31

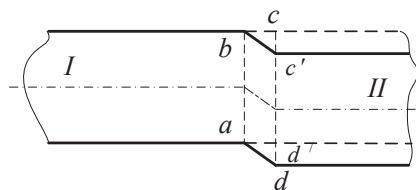


Рис. 2.32

Рассмотрим элемент бруса $abcd$ до и после сдвига (см. рис. 2.33). Величина cc' , на которую сдвинулось сечение cd относительно сечения ab , расположенного от него очень близко, называется абсолютным сдвигом. Абсолютный сдвиг зависит от расстояния h между смежными сечениями ab и cd .

Угол γ , на который изменяются прямые углы прямоугольника, называется относительным сдвигом. Относительный сдвиг определим из соотношения:

$$\frac{cc'}{bc} = \frac{e}{h} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (2.49)$$

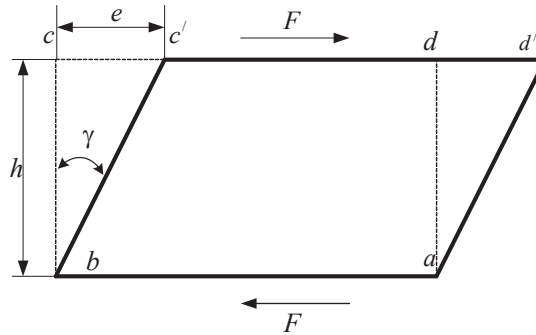


Рис. 2.33

Функцию $\operatorname{tg} \gamma$ приравняем к аргументу ввиду того, что в упругом состоянии, которое рассматриваем, угол γ очень мал. Таким образом, за меру сдвига принимают относительный сдвиг γ , т. е. отношение абсолютного сдвига между двумя близко расположенными смежными сечениями к расстоянию между этими сечениями. Единица измерения относительного сдвига — радиан.

Рассечем брус по линии $n-n$ между перерезывающими силами F (см. рис. 2.31) и, применив метод сечений, заменим действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами (рис. 2.34).

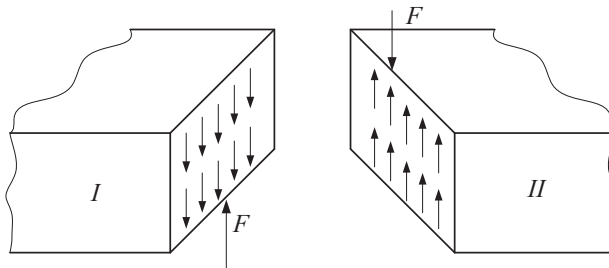


Рис. 2.34

Эти силы действуют в плоскости сечения, следовательно, сдвиг вызывает касательные напряжения. Если предположить, что внутренние силы распределяются равномерно по площади сечения, то касательные напряжения определяются формулой:

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad (2.50)$$

где A — площадь поперечного сечения бруса.

Экспериментально установлено, что величина сдвига в пределах упругих деформаций пропорциональна сдвигающей силе F , расстоянию между плоскостями сдвига h и обратно пропорциональна площади поперечного сечения A , т. е.:

$$e = \frac{Fh}{GA}, \quad (2.51)$$

где GA — жесткость сечения бруса при сдвиге.

Учитывая выражения (2.49) и (2.50), из уравнения (2.51) найдем:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (2.52)$$

Формула (2.52) выражает закон Гука при сдвиге: угловые деформации пропорциональны касательным напряжениям.

Величина G зависит от свойств материала и называется модулем упругости сдвига. Между модулями упругости и сдвига существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (2.53)$$

где μ — коэффициент поперечной деформации. В практических расчетах принимают для одного и того же материала $G = 0,4E$. Модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа для стали.

2.10.2. Определение внутренних силовых факторов при кручении

Кручением называется такой вид деформации, при которой в поперечных сечениях стержня действуют только крутящие моменты, а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы и изгибающий момент) отсутствуют. Эти крутящие моменты M_k возникают под действием внешних моментов T , которые передаются на вал в местах посадки зубчатых колес, шкивов и т. д. (см. рис. 2.35). Попереч-

ная нагрузка также вызывает крутящие моменты, добавляя при этом поперечные и изгибающие силы (рис. 2.36).

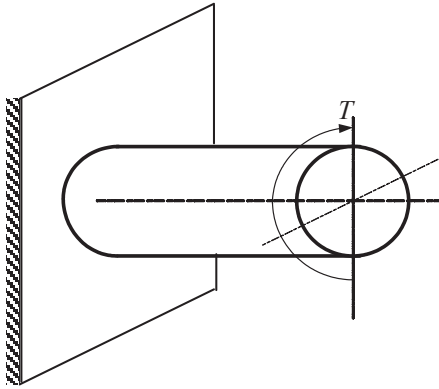


Рис. 2.35

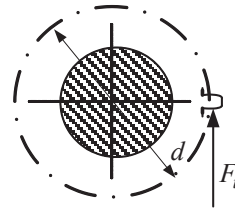


Рис. 2.36

Вращающиеся и работающие на кручение стержни, имеющие, как правило, круглое сечение, называются валами.

Для определения напряжений и деформаций вала необходимо знать значения крутящих моментов, действующих на его отдельных участках.

Условимся внешние моменты изображать в виде линии с двумя кружками, в которых будет поставлена точка (движение на нас) либо крестик (движение от нас).

Для определения крутящих моментов M_k , возникающих в сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов T или поперечных сил F_t , применим метод сечений. Мысленно рассечем вал на две части, левую отбрасываем и рассматриваем равновесие оставшейся правой части (см. рис. 2.37). Действие отброшенной части заменим крутящим моментом M_k .

Для равновесия отсеченной части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна нулю. Отсюда в рассматриваемом сечении $n-n$ внутренний крутящий момент M_k равен внешнему T .

Если на отсеченную часть будут действовать несколько внешних моментов, то, рассуждая аналогичным образом, делаем вывод, что крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения:

$$M_k = \sum T_i.$$

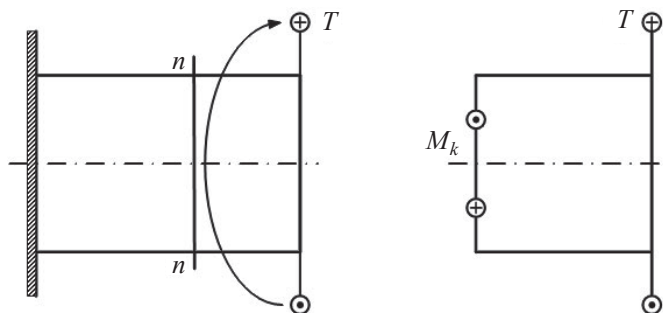


Рис. 2.37

Диаграмма, показывающая распределение значений крутящих моментов по длине вала, называется эпюрой крутящих моментов. Для построения эпюр необходимо условиться о правиле знаков крутящих моментов на эпюре. Вообще говоря, физического смысла знак крутящего момента не имеет, важно лишь принятое правило выдержать по всей длине вала.

Крутящий момент в сечении $n-n$ будем считать положительным, когда внешний момент T вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения. Если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке при взгляде со стороны сечения, то крутящий момент в сечении будем считать отрицательным.

Построение эпюры крутящих моментов поясним на следующем примере. Рассмотрим вал AF , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω в подшипниках K и N (см. рис. 2.38). Вал находится в равновесии под действием четырех моментов, приложенных в сечениях B , C , D и E . Рассечем вал в любом месте на участке AB и, рассмотрев левую оставшуюся часть, определим, что на участке I крутящий момент в сечении равен нулю. Рассечем вал на участке II и определим, что $M_{k_{II}} = T_1 = 10$ Нм. Момент на участке BC в соответствии с правилом знаков считаем положительным. Рассмотрим сечение $c-c$ на участке CD , отбросив правую часть. Крутящий момент в сечении $M_{k_{III}} = T_1 + T_2 = 10 + 30 = 40$ Нм. Так как моменты T_1 и T_2 имеют одинаковое направление, момент в сечении определяется как их арифметическая сумма. Момент на IV участке определим как алгебраическую сумму внешних моментов, действующих на левую сторону от сечения $d-d$. $M_{k_{IV}} = T_1 + T_2 - T = 10 + 30 - 90 = -50$ Нм. Очевидно, что такой же результат получится и в случае, если отбросить левую часть вала и рас-

смотреть равновесие оставшейся правой. Отметим, что метод сечений не определяет, какую именно часть вала нужно отбрасывать, но для упрощения решения выгоднее отбросить ту часть, на которую действует большее число внешних силовых факторов (внешних моментов). Этот вывод справедлив для определения внутренних силовых факторов при любых видах деформаций. На последнем, пятом, участке крутящий момент равен нулю.

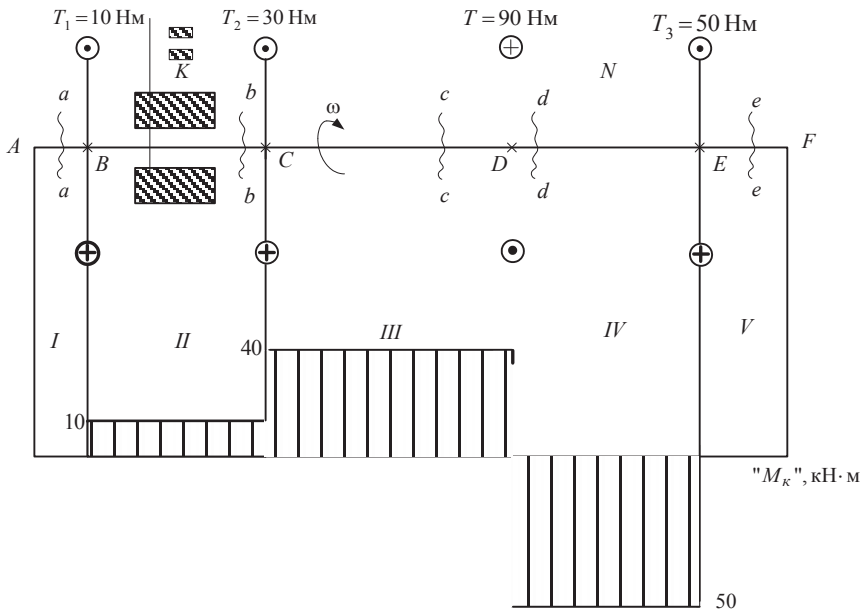


Рис. 2.38

Построенная эпюра имеет вид прямоугольников, в местах приложения внешних моментов ординаты эпюры скачкообразно изменяются на величину приложенного в этом сечении внешнего момента.

Если на вал действуют поперечные силы, вызывающие кручение, то перед построением эпюр необходимо определить внешние моменты, создаваемые этими силами. Для схемы, изображенной на рис. 2.36,

$$T = F_t \frac{d}{2}.$$

В практике чаще всего задается не внешний скручивающий момент, а передаваемая мощность P и частота вращения n , при этом P задается в киловаттах, а n — в оборотах в минуту. Так как $P = T\omega$, то можно записать:

$$T = \frac{P}{\omega}, \quad (2.54)$$

где размерность T — [Нм]; размерность P — [Вт] и ω — [рад/с]. Выразим угловую скорость ω через частоту вращения n :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.55)$$

Подставим мощность P и ω из выражения (2.55) в формулу (2.54):

$$T = \frac{1000P \cdot 30}{\pi n} = 9554 \frac{P}{n} \approx 9550 \frac{P}{n}. \quad (2.56)$$

Зависимость (2.56) широко используется в практических расчетах, т. к. позволяет определить крутящий момент в ньютонметрах, используя единицы измерения мощности и частоты вращения соответственно в киловаттах и оборотах в минуту.

2.10.3. Определение касательных напряжений и деформаций при кручении стержня круглого сечения

Крутящие моменты представляют собой равнодействующие внутренних сил. При кручении стержня в его поперечных сечениях возникают непрерывно распределенные касательные напряжения, которые нужно уметь определять при расчетах на прочность.

Нанесем на круглый стержень ортогональную сетку и нагрузим его внешним моментом T (см. рис. 2.39). По результатам этого опыта можно сделать следующие выводы:

- прямоугольники ортогональной сетки превратились в параллелограммы, следовательно, в поперечных сечениях действуют касательные напряжения;
- расстояния между линиями, нормальными к оси стержня, и длина всего стержня не изменились. Не изменился также и диаметр стержня. Можно предположить, что каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол, оставаясь плоским и нормальным к оси (гипотеза

Бернулли). На основании этой гипотезы делаем вывод о том, что радиусы всех поперечных сечений повернулись на определенные углы, оставаясь прямолинейными. Таким образом, точка K переместится в положение K' по дуге радиуса r , а точка N — в N' по дуге меньшего радиуса ρ (рис. 2.40, а).

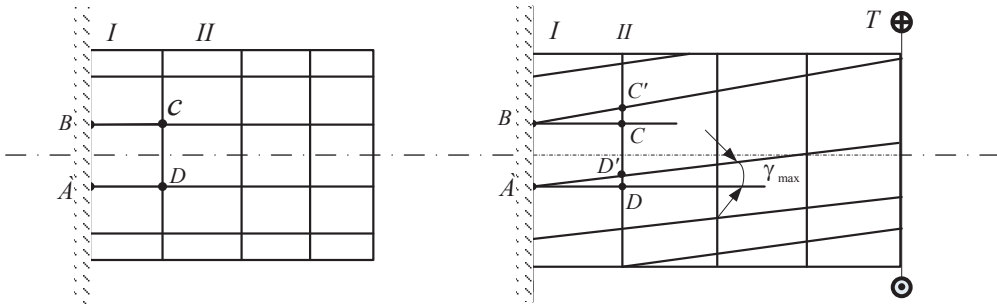


Рис. 2.39

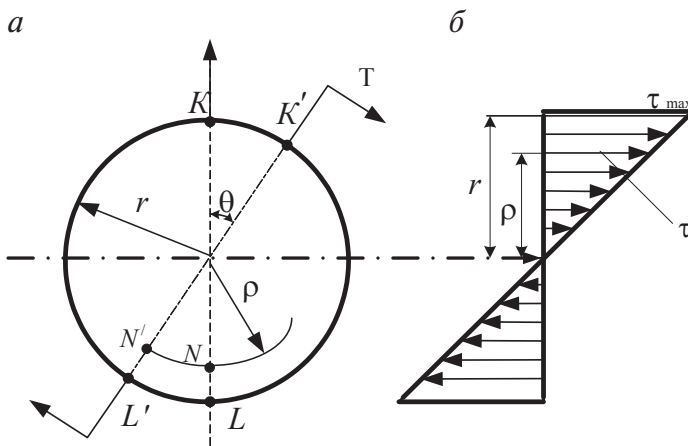


Рис. 2.40

На основании этого можно сделать вывод, что при кручении круглого стержня в его поперечных сечениях действуют только касательные напряжения, а нормальные напряжения отсутствуют, т. е. мы имеем случай чистого сдвига.

Для того чтобы установить закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению круглого стержня, нагруженного крутящим моментом T , рассмотрим его деформацию между сечениями I и II (см. рис. 2.39 и рис. 2.41).

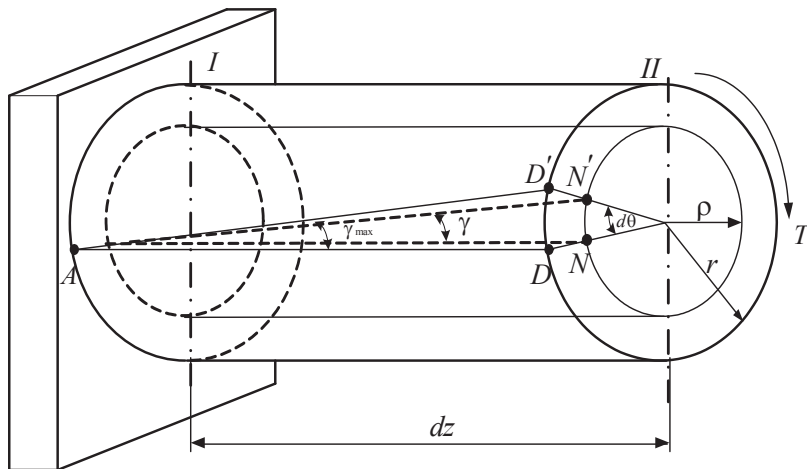


Рис. 2.41

Угол сдвига элемента $ABCD$, расположенного на поверхности стержня:

$$\gamma_{\max} = \frac{DD'}{dz} = \frac{rd\theta}{dz}.$$

Угол сдвига элемента, расположенного на расстоянии ρ от оси стержня:

$$\gamma = \frac{NN'}{dz} = \frac{\rho d\theta}{dz}. \quad (2.57)$$

На основании закона Гука для сдвига можно записать

$$\tau = G\gamma = \frac{G\rho d\theta}{dz}. \quad (2.58)$$

Из формулы (2.58) следует, что при кручении касательные напряжения τ и деформации γ прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения. В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю, наибольшее значение они принимают на поверхности стержня. Эпюра касательных напряжений в поперечном сечении круглого стержня изображена на рис. 2.40, б.

Определим касательные напряжения из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент от касательных напряжений (рис. 2.42):

$$M_k = \int_A \tau dA \cdot \rho, \quad (2.59)$$

где τdA — элементарная сила, действующая на площадке dA .

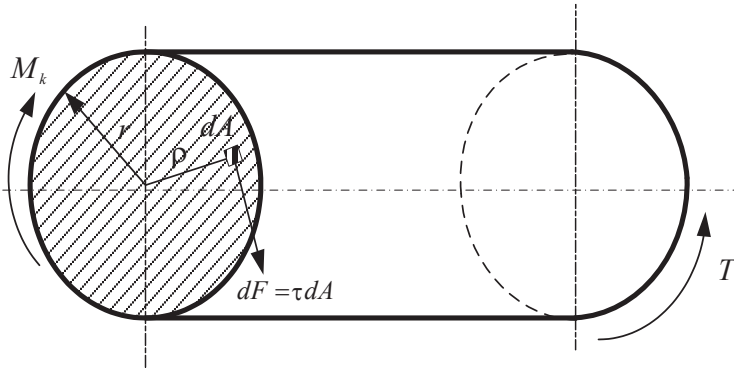


Рис. 2.42

Подставим в выражение (2.59) касательные напряжения из формулы (2.58):

$$M_k = \frac{G d\theta}{dz} \int_A \rho^2 dA. \quad (2.60)$$

Интеграл $\int_A \rho^2 dA$ представляет собой полярный момент инерции круглого сечения J_p , следовательно, $M_k = G \frac{d\theta}{dz} J_p$, откуда:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M_k}{G J_p}. \quad (2.61)$$

Подставим значение $d\theta/dz$ в формулу (2.58) и получим:

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p}. \quad (2.62)$$

Из выражения (2.62) следует, что в точках, равноудаленных от центра сечения, касательные напряжения одинаковы. Наибольшие напряжения τ возникают в точках, расположенных на поверхности стержня, где $\rho = r$.

$$\tau_{\max} = \frac{M_k r}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.63)$$

где величина W_p , представляющая геометрическую характеристику плоского сечения, носит название полярного момента сопротивления или момента сопротивления при кручении:

$$W_p = \frac{J_p}{r}. \quad (2.64)$$

Для круглого сплошного сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.65)$$

Для кольцевого сечения (см. рис. 2.28):

$$\sigma_{\min} = \frac{F_x}{A} - \frac{F_y \cdot l}{W_{\text{и}}}, \quad (2.66)$$

где $\alpha = d/D$.

Запишем условие статической прочности при кручении, обозначив допускаемое касательное напряжение через $[\tau]$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (2.67)$$

Величину $[\tau]$ принимают равной 0,5–0,6 допускаемого напряжения на растяжение. Уравнение (2.67) можно использовать только для круглых валов, как сплошных, так и полых; для валов других сечений его применять нельзя. Используя условие прочности, можно рассчи-

татель диаметр вала либо определить максимальный допускаемый крутящий момент, который может передать вал. Подставим в формулу (2.67) выражение полярного момента сопротивления:

$$\frac{16M_k}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (2.68)$$

откуда:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau]}}. \quad (2.69)$$

Аналогично для полых валов можно записать:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2(1-\alpha^4)[\tau]}}. \quad (2.70)$$

Допускаемый из условия статической прочности при кручении максимальный крутящий момент определяют по формуле:

$$M_{k \max} = W_p [\tau]. \quad (2.71)$$

Определение деформаций при кручении стержня круглого сечения

Для определения деформаций вала при кручении воспользуемся формулой (2.61):

$$d\theta = \frac{M_k \cdot dz}{G \cdot J_p}. \quad (2.72)$$

Взаимный угол поворота сечений на длине dz равен:

$$\theta = \int_0^z \frac{M_k \cdot dz}{G \cdot J_p}, \quad (2.73)$$

где $G \cdot J_p$ — жесткость вала при кручении. Если крутящий момент и жесткость не изменяются на всем участке интегрирования, то полную деформацию участка вала длиной l можно определить по формуле:

$$\sigma_{\min} = \frac{F_x}{A} - \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}. \quad (2.74)$$

Эта формула по структуре аналогична формуле для определения деформации при растяжении и сжатии.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины вала, называется относительным углом закручивания:

$$\varphi = \frac{\theta}{l} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}. \quad (2.75)$$

На практике, кроме требований прочности, часто вводится условие жесткости, которое заключается в том, что относительный угол закручивания не должен превышать определенную величину, т. е.

$$\varphi = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]. \quad (2.76)$$

Формула (2.76) выражает условие жесткости. В ней относительный и допускаемый угол закручивания на длине 1 м $[\varphi]$ имеют размерность — радиан. В практике $[\varphi]$ часто задают в градусах. В этом случае формулу (2.76) можно записать в виде:

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\varphi^0]. \quad (2.77)$$

Отметим, что для валов средних диаметров рекомендуют выбирать $[\varphi^0]$ равным 0,5° на один метр длины. Из выражения (2.77) можно определить диаметр вала по заданной жесткости, учитывая, что полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4; \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{180^0 M_k}{\pi G \cdot 0,1 [\varphi^0]}} = 4,9 \sqrt[3]{\frac{M_k}{G [\varphi^0]}}. \quad (2.78)$$

Для полого вала формула расчета диаметра из условия жесткости:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{180^0 M_k}{\pi G \cdot 0,1(1-\alpha^4)[\varphi^0]}} = 4,9 \sqrt[3]{\frac{M_k}{G(1-\alpha^4)[\varphi^0]}}. \quad (2.79)$$

Используя формулу (2.74), можно построить эпюру угловых перемещений поперечных сечений вала, нагруженного крутящими моментами. Если рассматривается вращающийся вал, у которого нет неподвижных сечений, то для построения эпюры углов закручивания одно из сечений необходимо принять за условно неподвижное. Примем следующее правило знаков для углов поворота сечений: углы θ будут считаться положительными, когда сечение, расположенное справа, поворачивается относительно сечения, расположенного слева, по часовой стрелке. При таком условии знак угла закручивания будет совпадать со знаком крутящего момента на участке вала.

Построение эпюры углов закручивания рассмотрим на примере вращающегося вала, нагруженного четырьмя внешними моментами. Построим эпюру крутящих моментов и примем сечение B за условно неподвижное (см. рис. 2.43).

Угол поворота на участке AB равен нулю, так как на этом участке отсутствует крутящий момент. Сечение C относительно B повернется на угол θ_{CB} , который определим по формуле (2.74). С учетом принятого правила знаков:

$$\theta_{CB} = -\frac{M_{k_{BC}} l_{BC}}{GJ_p},$$

где $M_{k_{BC}}$ — крутящий момент на участке BC ; l_{BC} — длина участка BC .

В принятом масштабе [град/м] отложим ординату θ_{CB} . Полученную точку N соединим прямой линией с точкой M , так как зависимость угла поворота от длины участка вала линейная. Вычислим угол закручивания сечения D относительно сечения C :

$$\theta_{DC} = \frac{M_{k_{DC}} l_{DC}}{GJ_p}.$$

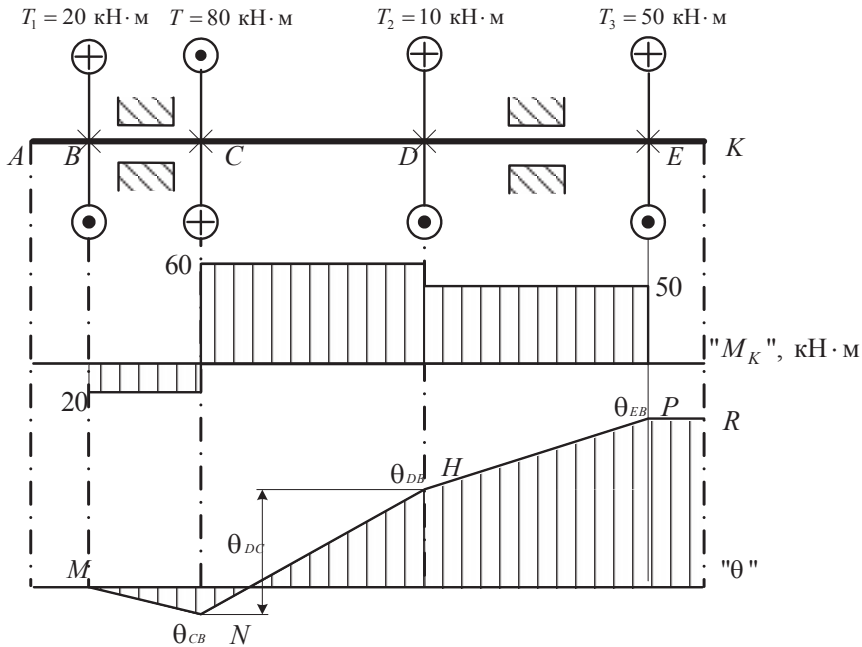


Рис. 2.43

Угол поворота сечения D относительно сечения B , принятого за неподвижное, определяем как алгебраическую сумму углов D относительно C и C относительно B :

$$\theta_{DB} = \frac{M_{k_{DC}} l_{DC}}{GJ_p} - \frac{M_{k_{CB}} l_{BC}}{GJ_p}.$$

Аналогично определяем угол закручивания сечения E относительно D и затем E относительно B :

$$\theta_{ED} = \frac{M_{k_{ED}} l_{ED}}{GJ_p}; \theta_{EB} = \theta_{ED} + \theta_{DB}.$$

На участке EK поворота сечений не происходит, так как крутящий момент на этом участке равен нулю. Все сечения данного участка поворачиваются относительно сечения B на такой же угол, на какой повернулось относительно B сечение E . Участок эпюры здесь будет в виде прямой линии PR , параллельной оси вала.

2.11. Плоский поперечный изгиб прямого бруса

2.11.1. Общие понятия о деформации изгиба

Рассмотрим прямолинейный брус с продольной осью симметрии, нагруженный уравновешенной системой сил, линии действия которых лежат в плоскости симметрии и перпендикулярны оси бруса (рис. 2.44).

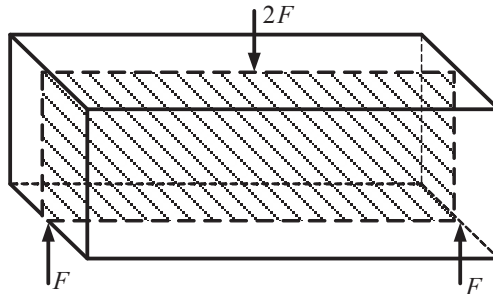


Рис. 2.44

Брус под действием этих сил изогнется, а его продольная ось искривится. Такой вид деформации называется изгибом, а брусья, работающие на изгиб, — балками.

Деформация изгиба бруса произойдет в плоскости действия сил (силовой плоскости), вследствие чего такой изгиб называется плоским.

При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают внутренние моменты сил упругости, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости поперечного сечения бруса. Эти внутренние моменты называются изгибающими моментами в сечении или просто изгибающими моментами. Если изгибающий момент является единственным внутренним усилием в сечении, то такой изгиб называют чистым. Чистый изгиб возникает под действием двух равных и противоположно направленных моментов.

В случае, когда в сечениях бруса наряду с изгибающим моментом возникает также и поперечная сила, изгиб носит название поперечного.

При плоском поперечном изгибе ось балки после деформации остается в плоскости действия внешних сил.

2.11.2. Опоры и опорные реакции балок

Балки служат для передачи действующих на них внешних сил (нагрузок) на опоры, на которых они установлены. В опорах возникают реакции, т. е. силы действия опор на рассматриваемую балку. Под действием внешних нагрузок и реакций опор балка находится в равновесии. Решение всех задач, связанных с деформацией изгиба, следует начинать с определения опорных реакций. В зависимости от числа и устройства опор балки число реакций, подлежащих определению, будет различно.

Опоры балок по их устройству подразделяются на три основных типа.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 2.45, а).

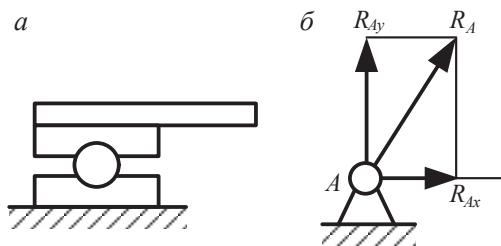


Рис. 2.45

Конец балки опирается на шарнир, который расположен на неподвижной подушке. Такая опора допускает поворот конца балки, но не дает ему возможности перемещаться в каком-либо направлении. Реакция лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, и проходит через его центр. Обычно эту реакцию раскладывают на две составляющие — вертикальную R_{Ay} и горизонтальную R_{Ax} (рис. 2.45, б).

- Шарнирно-подвижная опора (см. рис. 2.46, а). Эта опора отличается от предыдущей тем, что у нее опорная подушка поставлена на катки, которые дают ей возможность передвигаться вместе с концом балки по направляющей. Таким образом, шарнирно-подвижная опора дает возможность концу балки поворачиваться вокруг оси шарнира и перемещаться вдоль плоскости качения и накладывает на конец балки одну связь — не дает возможности перемещаться в направлении, перпендикулярном направляющей (плоскости качения). Следовательно, такая опора дает лишь одну составляющую реакции, неизвестную по величине и известную по направлению. *Реакция проходит через*

центр шарнира и направлена перпендикулярно направляющей. В дальнейшем шарнирно-подвижную опору будем изображать, как показано на рис. 2.46, б.

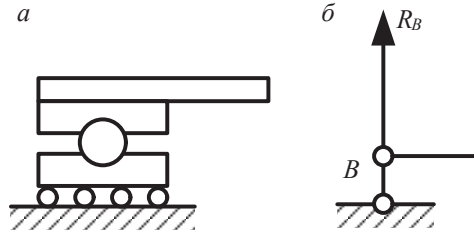


Рис. 2.46

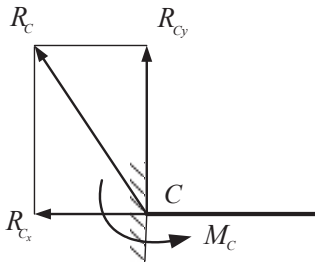


Рис. 2.47

- Жесткая заделка, или защемление (рис. 2.47). Такое устройство опоры не допускает ни угловых, ни линейных перемещений защемленного конца балки. В жесткой заделке возникают реакции, неизвестная по величине и направлению, и реактивный момент, препятствующий повороту конца балки.

Обычно реакцию R_C заменяют двумя составляющими — вертикальной R_{Cy} и горизонтальной R_{Cx} . Таким образом, можно отметить, что жесткая заделка дает три неизвестные реакции: вертикальную и горизонтальную составляющие и реактивный момент.

В технике балку с одним защемленным концом называют консольной балкой, или консолью.

В случае, когда все внешние силы, действующие на балку, направлены перпендикулярно ее оси, число неизвестных реакций уменьшается, так как в шарнирно-неподвижной опоре и в жесткой заделке составляющая реакции, направленная вдоль оси балки, будет равна нулю.

2.11.3. Определение опорных реакций

В случае действия на балку плоской системы сил можно записать три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_o = 0,$$

откуда следует: для равновесия балки необходимо, чтобы суммы проекций всех сил, приложенных к балке, включая реакции опор на оси x и y , и сумма моментов всех сил относительно любого полюса в плоскости действия сил были равны нулю.

Если опорные реакции балок могут быть найдены из уравнений статики, то балки называют статистически определимыми. Они могут быть только двух видов:

- балка с одним жестко зашечленным и одним свободным концом (консоль) (рис. 2.48, *а*);
- балка с одной шарнирно-неподвижной и другой шарнирно-подвижной опорой (рис. 2.48, *б*, *в*). Балка, изображенная на рис. 2.48, *б*, называется простой, а балка на рис. 2.48, *в* — консольной, так как имеет свешивающиеся с опор концы, которые называются консолями.

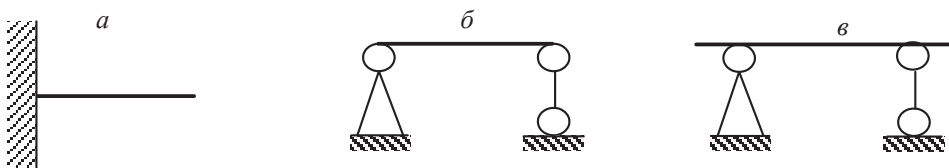


Рис. 2.48

Пример 1

Определить опорные реакции консольной балки (рис. 2.49).

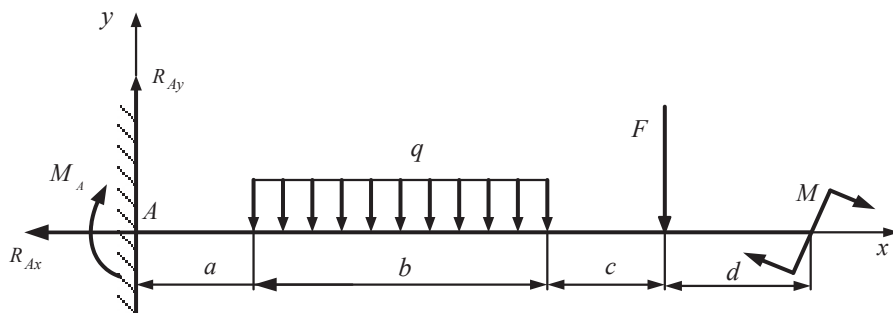


Рис. 2.49

Решение. Реакцию заделки представляем в виде двух составляющих — вертикальной R_{Ay} и горизонтальной R_{Ax} и реактивного момента

та M_A ; при этом направления сил вдоль осей и направление момента принимаем произвольно. Условимся здесь и в дальнейшем ось x направлять вправо, а ось y — вверх.

Составляем уравнение равновесия:

- Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю: $\sum F_{kx} = 0$. Из этого уравнения получаем, что $R_{Ax} = 0$, т.е. при отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая реакции равна нулю;

- Сумма проекций всех сил на вертикальную ось y равна нулю: $\sum F_{ky} = 0$. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем ее равнодействующей $q \cdot b$, приложенной в середине участка b :

$$R_A - q \cdot b - F = 0 \rightarrow R_{Ay} = q \cdot b + F.$$

- Сумма моментов всех сил относительно любого центра равна нулю. За центр примем точку A : $\sum M_A = 0$.

$$-M_A - q \cdot b(a + 0,5b) - F(a + b + c) - M = 0,$$

откуда

$$M_A = -q \cdot b(a + 0,5b) - F(a + b + c) - M.$$

Реактивный момент получился со знаком минус, следовательно, его направление необходимо заменить на противоположное (против направления вращения часовой стрелки).

Пример 2

Определить опорные реакции двухопорной одноконсольной балки (см. рис. 2.50).

Решение. Поскольку горизонтальная нагрузка отсутствует, то

$$R_{Ax} = 0.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$-M - F \cdot 3 + R_B \cdot 4 - (q \cdot 2) \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{M + 3F + 10q}{4} = \frac{10 + 3 \cdot 60 + 10 \cdot 5}{4} = 60 \text{ Н}.$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0; \\ -R_{Ay} \cdot 4 - M + F \cdot 1 - (q \cdot 2) \cdot 1 &= 0; \\ R_{Ay} &= \frac{-M + F - 2q}{4} = \frac{-10 + 60 - 10}{4} = 10 \text{ Н}.\end{aligned}$$

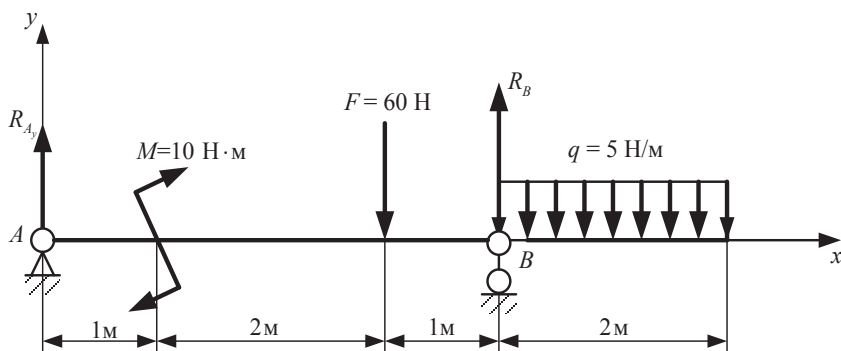


Рис. 2.50

В качестве проверочного воспользуемся уравнением проекций всех сил на вертикальную ось $\sum F_{ky} = 0$:

$$R_{Ay} - F + R_B - q \cdot 2 = 0; \quad 10 - 60 + 60 - 5 \cdot 2 = 0.$$

2.11.4. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении

При плоском поперечном изгибе в любых поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора — поперечная сила Q и изгибающий момент $M_{\text{и}}$. Для их определения, как и при других видах деформаций, применим универсальный метод, который называется методом сечений.

Мысленно разрежем балку по сечению $n-n$, находящемуся на расстоянии x от левой опоры A (см. рис. 2.51, *а*). Правую часть балки отбросим и рассмотрим равновесие оставшейся левой части (см. рис. 2.51, *б*). Для того чтобы она находилась в равновесии, в сечении должны действовать поперечная сила и изгибающий момент, представляющие собой действие отброшенной части на оставшуюся. Для определения Q и $M_{\text{и}}$ запишем два уравнения равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A - F_1 - Q = 0; \quad Q = R_A - F_1.$$

$$\sum M_c = 0; \quad R_A x - F_1(x-a) - M_{\text{и}} = 0; \quad M_{\text{и}} = R_A x - F_1(x-a).$$

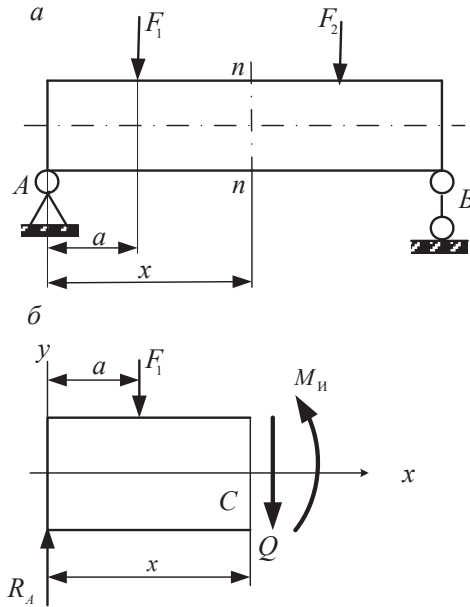


Рис. 2.51

Из полученных выражений сформулируем правила определения Q и $M_{\text{и}}$.

Результирующая внутренних сил, приложенная в сечении оставшейся части балки, численно равна алгебраической сумме внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, называется поперечной силой и обозначается Q .

Момент пары внутренних сил, приложенный к оставшейся части балки, численно равный алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, называется изгибающим моментом и обозначается $M_{\text{и}}$.

Если вместо левой части балки рассмотреть правую, то изгибающий момент и поперечная сила в сечении будут иметь те же значения, но с противоположным знаком.

Для того чтобы изгибающий момент и поперечная сила в одном и том же сечении имели один знак независимо от того, к какой части они приложены, введем следующие правила знаков.

Поперечная сила в сечении балки $n-n$ (рис. 2.52, а) считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа от сечения — сверху вниз.

В противоположном случае поперечная сила Q в сечении $n-n$ будет считаться отрицательной (рис. 2.52, б).

Изгибающий момент в сечении $m-m$ (рис. 2.53, а) считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа от сечения — против. При направлении равнодействующих внешних моментов справа и слева от рассматриваемого сечения в другом направлении момент в сечении считается отрицательным (рис. 2.53, б).

Из рис. 2.53 следует, что изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз, отрицательным — если выпуклостью вверх.

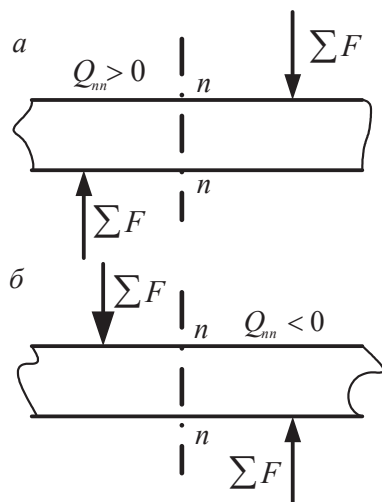


Рис. 2.52

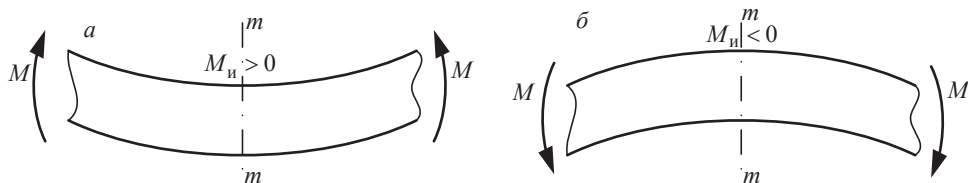


Рис. 2.53

Волокна балок, расположенные в вогнутой части, испытывают сжатие, а в выпуклой — растяжение. При построении эпюр изгибающих моментов положительные ординаты откладывают вверх от базовой оси, таким образом, эпюра будет построена со стороны сжатых волокон балки.

2.11.5. Зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки

Рассмотрим балку, нагруженную силами F_1, F_2, F_3 . Опорные реакции — R_A и R_B (рис. 2.54). Запишем момент в сечении $n-n$ от сил, лежащих левее сечения:

$$M_{иx} = R_A \cdot x - F_1(x - \alpha_1) + F_2(x - \alpha_2).$$

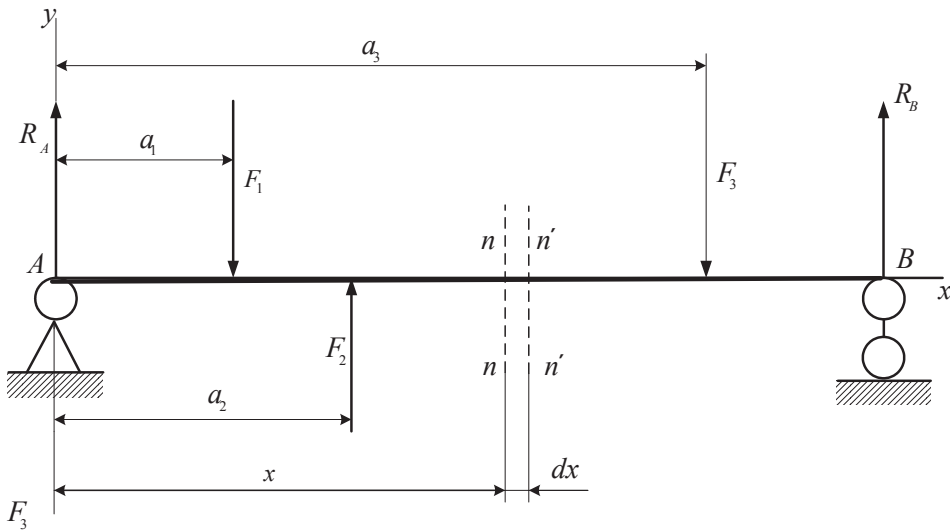


Рис. 2.54

Поперечная сила в этом сечении равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных слева от сечения:

$$Q_x = R_A - F_1 + F_2.$$

Индекс « x » у изгибающего момента и поперечной силы означает, что они являются функциями абсциссы x .

Определим значение момента в сечении $n'-n'$, расположенного на расстоянии dx от первого сечения:

$$M_{иx+dx} = R_A(x + dx) - F_1(x + dx - \alpha_1) + F_2(x + dx - \alpha_2).$$

Приращение момента:

$$dM_{\text{и}} = M_{\text{и}_{x+dx}} - M_{\text{и}_x} = R_A dx - F_1 dx + F_2 dx = (R_A - F_1 + F_2) dx,$$

т. е. $dM_{\text{и}} = Q_x dx$, откуда:

$$Q_x = \frac{dM_{\text{и}}}{dx}. \quad (2.80)$$

Поперечная сила в сечении равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения.

Этот вывод справедлив и при наличии равномерно распределенной нагрузки q .

Рассмотрим балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q и силами F_1 и F_2 (рис. 2.55).

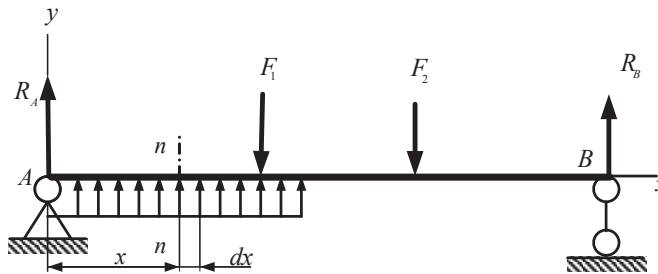


Рис. 2.55

Если в сечении $n-n$ поперечная сила равна Q_x , то в сечении, расположенном на расстоянии dx от рассматриваемого, поперечная сила будет равна $Q_x + dQ_x$, где $dQ_x = q \cdot dx$. Следовательно:

$$q = \frac{dQ_x}{dx}, \quad (2.81)$$

т. е. производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Возьмем производную от обеих частей равенства (2.81) и получим

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{d^2 M_{\text{и}}}{dx^2} = q, \quad (2.82)$$

т. е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки.

Зависимости (2.81) и (2.82) выведены русским ученым Д. И. Журавским и используются при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

2.11.6. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Нормальные и касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях балки, зависят от изгибающих моментов M и поперечных сил Q . Для определения опасных сечений и наглядного представления о характере изменения M и Q по длине балки строят графики, которые называются эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил. Чтобы усвоить технику их построения, рассмотрим пример.

Построить эпюры Q и M для балки, представленной на рис. 2.56, а.

Решение

1. Определение опорных реакций:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \\ q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M + R_B \cdot 2a - F \cdot 3a &= 0; \\ R_B &= \frac{-q \frac{a^2}{2} - M + 3Fa}{2a} = \frac{-10 \cdot \frac{1^2}{2} - 10 + 3 \cdot 10 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 7,5 \text{ Н}; \\ \sum M_B &= 0; \\ -q \cdot a \cdot 2,5a - R_A \cdot 2a + M - F \cdot a &= 0; \\ R_A &= \frac{q \cdot 2,5a^2 + M - F \cdot a}{2a} = \frac{10 \cdot 2,5 + 10 - 10}{2} = 12,5 \text{ Н}.\end{aligned}$$

$$\text{Проверка: } \sum F_{ky} = 0; \quad -q \cdot a + R_A + R_B - F = -10 \cdot 1 + 12,5 + 7,5 - 10 = 0.$$

2. Построение эпюры поперечных сил « Q » (см. рис. 2.56, б). Характерными сечениями разбиваем балку на четыре участка. Сечения проводим по краям балки, а также через точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а также в начале и конце участков с рас-

пределенной нагрузкой. Поперечную силу в пределах каждого участка будем записывать в виде уравнения, аргументом которого является переменная координата x . Поперечную силу находим в соответствии с правилом как алгебраическую сумму внешних сил, действующих слева от рассматриваемого сечения. Индекс u поперечной силы обозначает номер участка.

$Q_1 = -qx$ — это уравнение прямой линии, которую можно построить по двум точкам. Определяем значение Q в начале и конце участка.

$$Q_{1,x=0} = 0; \quad Q_{1,x=1} = -q \cdot 1 = -10 \text{ Н};$$

$$Q_{II} = R_A - q \cdot a = 12,5 - 10 \cdot 1 = 2,5 \text{ Н}.$$

В любом сечении участка AC поперечная сила имеет одно и то же значение, эпюра будет изображаться линией, параллельной базовой оси.

$Q_{III} = R_A - q \cdot a = 2,5 \text{ Н}$. Характер эпюры тот же, что и на участке AC .

Для определения Q на участке BD удобнее отбросить левую часть и рассмотреть оставшуюся правую. $Q_{IV} = F = 10 \text{ Н}$.

Проводим базовую ось параллельно оси балки и в масштабе строим эпюру поперечных сил на каждом участке в соответствии с уравнениями (см. рис. 2.56, б).

3. Построение эпюры изгибающих моментов M_{II} (см. рис. 2.56, в). Изгибающие моменты также определяются по участкам и записываются в виде уравнений, в которых независимой переменной является координата x :

$$M_1 = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2}.$$

Уравнение изгибающих моментов на участке OA является уравнением второго порядка. Для построения эпюры необходимо определить моменты трех или более точек. Определим M_{II} в начале, конце и в середине первого участка:

$$M_{I,x=0} = 0; \quad M_{I,x=1} = -q \cdot \frac{1^2}{2} = -5 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_{I,x=0,5} = -q \cdot \frac{0,5^2}{2} = -1,25 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

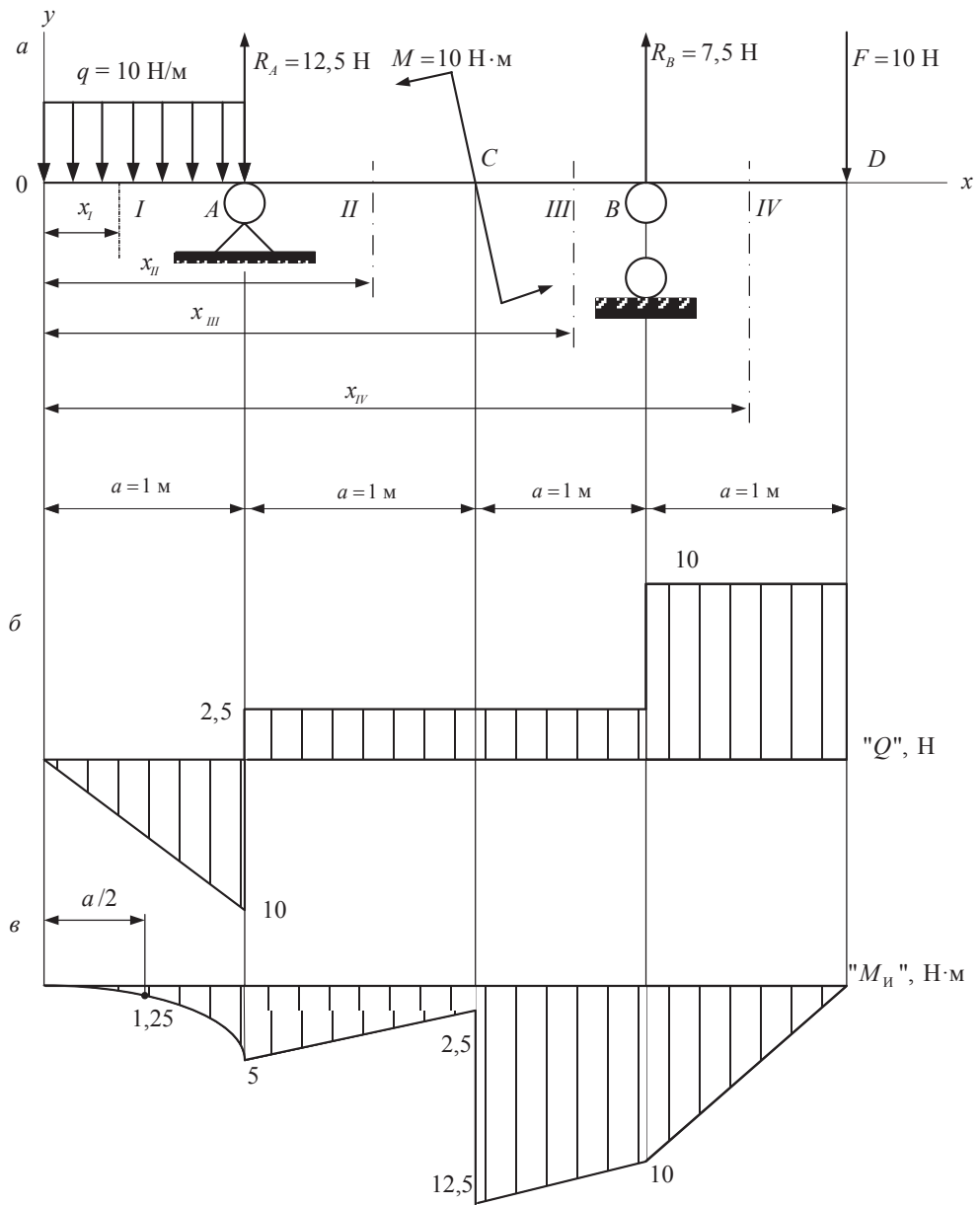


Рис. 2.56

Изгибающий момент на втором участке AC определим как алгебраическую сумму моментов внешних сил слева от сечения с координатой x_{II} :

$$M_{II} = -q \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) + R_A (x - a) = -10(x - 0,5) + 12,5(x - 1).$$

Получили уравнение прямой линии, которую можно построить по двум точкам, соответствующим двум значениям изгибающего момента. Находим эти значения в начале и конце участка AC :

$$M_{II_{x=1}} = -10 \cdot 0,5 + 12,5 \cdot 0 = -5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{II_{x=2}} = -10 \cdot 1,5 + 12,5 \cdot 1 = -2,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Уравнение моментов для участка CD также запишем, суммируя моменты внешних сил, расположенных слева от сечения x_{III} :

$$M_{III} = -q \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) + R_A (x - a) - M = -10(x - 0,5) + 12,5(x - 1) - 10.$$

Определим значения изгибающих моментов на границах участка CB :

$$M_{III_{x=2}} = -10 \cdot 1,5 + 12,5 \cdot 1 - 10 = -12,5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_{x=3}} = -10 \cdot 2,5 + 12,5 \cdot 2 - 10 = -10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для определения изгибающих моментов на четвертом участке удобнее отбросить левую часть балки, так как к ней приложено большее число внешних сил:

$$M_{IV} = -F(4a - x) = -10(4 - x).$$

Значения моментов на границах участка:

$$M_{IV_{x=3}} = 10 \cdot 1 = -10 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_{IV_{x=4}} = 0 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Строим в масштабе эпюру « $M_{\text{и}}$ » на каждом участке в соответствии с полученными уравнениями (см. рис. 2.56).

Анализируя эпюры « Q » и « $M_{\text{и}}$ », можно отметить следующие зависимости между характером эпюр и нагрузок:

- на участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра поперечных сил очерчивается наклонной прямой линией, а эпюра изгибающих моментов имеет криволинейное очертание — квадратичную параболу;
- между точками приложения сосредоточенных сил поперечная сила постоянна, а эпюра моментов очерчивается наклонной прямой линией;
- эпюра поперечных сил скачкообразно изменяется в местах приложения внешних сил, при этом величина скачка равна приложенной сосредоточенной силе;
- сосредоточенный момент не влияет на характер эпюры поперечных сил, а на эпюре изгибающих моментов в этом сечении имеется скачок, величина которого равна приложенному внешнему моменту;
- поперечная сила Q положительна на участках балки, где эпюра $M_{\text{и}}$ восходящая, если смотреть слева направо, и отрицательна на тех участках, где эпюра $M_{\text{и}}$ нисходящая;
- поскольку $Q = dM/dx$, то изгибающий момент достигает экстремума (максимума или минимума) в тех сечениях, где поперечная сила равна нулю, т. е. эпюра Q пересекает базовую ось.

Перечисленные зависимости используются для контроля правильности построения эпюр внутренних силовых факторов при деформации изгиба.

2.11.7. Определение нормальных напряжений при изгибе

Метод сечений дает возможность определить поперечную силу и изгибающий момент в сечении. Выяснение же закона распределения напряжений по сечению можно выполнить только на основании рассмотрения деформаций.

Если подвергнуть чистому плоскому изгибу балку с нанесенной на поверхность сеткой (см. рис. 2.57, а, б), то можно сделать следующие выводы:

- линии $n-n$ и $m-m$ на поверхности балки после деформации повернулись на угол $d\varphi$, оставаясь при этом прямыми. Прямые углы сетки не изменились. Это свидетельствует о том, что касательные напряжения в поперечных сечениях равны нулю;
- волокно ab удлинилось, волокно ef укоротилось, а cd осталось без изменения. Слой балки на уровне волокна cd называется нейтральным слоем.

Можно также заметить, что волокна балки деформируются по-разному; большие деформации у волокон, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

Определим закон изменения деформации по высоте сечения балки.

Отрезок $b'b''$ является полным удлинением волокна ab , длина которого до деформации была равна длине волокна cd , принадлежащего нейтральному слою.

Относительная деформация:

$$\varepsilon = \frac{bb'}{ab} = \frac{b'b''}{cd} = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя; y — расстояние от нейтрального слоя до рассматриваемого волокна.

Поскольку волокно бруса при изгибе растягивается или сжимается, применим закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E. \quad (2.83)$$

В соответствии с формулой (2.83) нормальные напряжения при изгибе изменяются по высоте поперечного сечения балки пропорци-

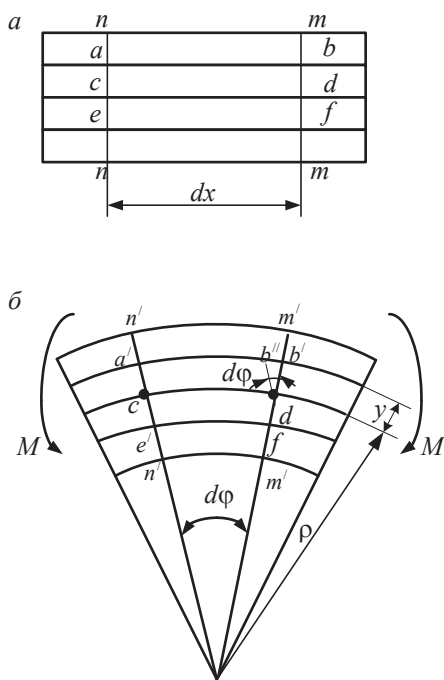


Рис. 2.57

онально расстоянию от нейтральной оси. Наибольшие напряжения будут у верхнего и нижнего краев сечения, как это показано на эпюре (рис. 2.58).

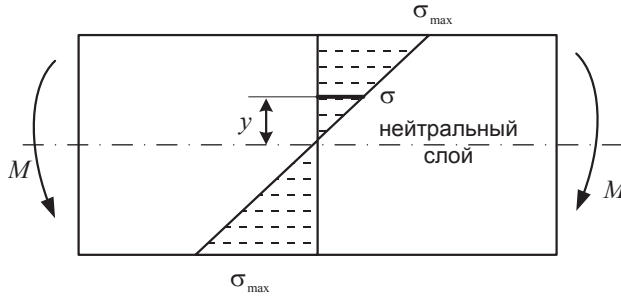


Рис. 2.58

Установив закон распределения напряжений, можно их определить, исходя из условия равновесия.

Выделим в площади поперечного сечения элементарную площадку dA , отстоящую на расстоянии y от нейтральной оси, проходящей через нейтральный слой (рис. 2.59).

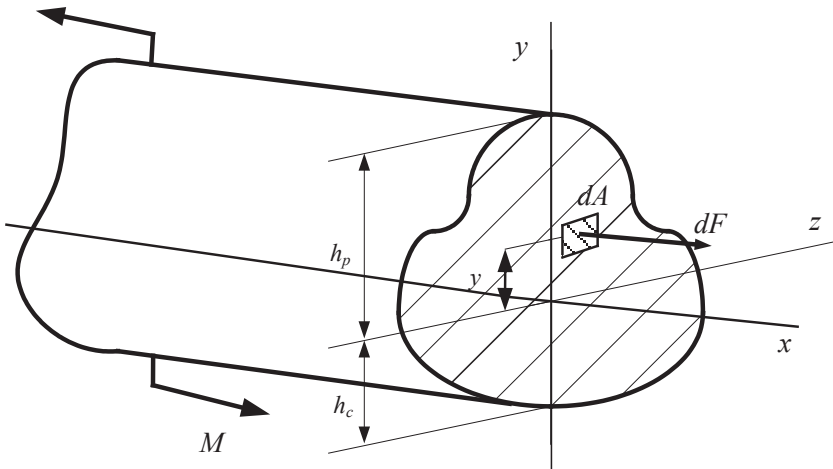


Рис. 2.59

Нормальная элементарная сила, действующая на этой площадке с учетом выражения (2.83):

$$dF = \sigma dA = \frac{E y}{\rho} dA. \quad (2.84)$$

Для равновесия рассматриваемой части балки (см. рис. 2.59) необходимо, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси x , y и z и суммы моментов относительно этих осей были равны нулю ($\sum F_y = 0, \sum F_z = 0$), так как внутренние силы σdA перпендикулярны этим осям; $\sum F_x = 0$ или, с учетом уравнения (2.84), $\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$. Отно-

шение E/ρ не может быть равно нулю, так как отличны от нуля и модуль упругости E , и кривизна нейтрального слоя.

Следовательно, интеграл:

$$\int_A y dA = 0.$$

Он представляет собой статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Статический момент равен нулю в том случае, если он взят относительно центральной оси, проходящей через центр тяжести сечения. Отсюда следует важный вывод о том, что нейтральная ось всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.

Элементарный момент внутренней силы, действующей на площадке dA относительно нейтральной оси z :

$$dM_{\text{и}} = dF \cdot y = \sigma dA \cdot y = \frac{E}{\rho} y^2 dA.$$

Сумма всех элементарных моментов внутренних сил упругости по условию равновесия равна внешнему моменту, т. е.:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M,$$

где $\int_A y^2 dA = 0$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси z .

$$\frac{E}{\rho} J_z = M,$$

откуда:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}. \quad (2.85)$$

Формула (2.85) является основной формулой теории изгиба. Величина $1/\rho$ представляет собой кривизну изогнутой оси балки и характеризует величину деформации при изгибе.

Из полученной формулы следует, что деформация при изгибе прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна произведению EJ_z , которое называется жесткостью балки при изгибе.

Подставим значения $1/\rho$ в формулу (2.84):

$$\sigma = \frac{M}{EJ_z} Ey = \frac{My}{J_z}. \quad (2.86)$$

Формула (2.86) позволяет определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки, если известны изгибающий момент и момент инерции сечения.

На отсеченную часть балки может действовать не один внешний момент, как на рис. 2.59, а несколько, а также любая другая нагрузка в виде сосредоточенных сил и распределенных нагрузок. В этом случае уравнение равновесия $\sum M_z = \int_A dF \cdot y = 0$ содержит алгебраическую

сумму моментов от всех внешних нагрузок, равную изгибающему моменту в сечении $M_{\text{из}}$. Поэтому в дальнейшем вместо суммы внешних моментов в формулы следует подставлять изгибающий момент в сечении.

Формула (2.86) соответствует чистому изгибу. При поперечном изгибе в поперечных сечениях кроме нормальных действуют и касательные напряжения, вызывающие деформацию сдвига. Вследствие этого гипотеза плоских сечений теряет свою силу. Однако опыт показывает, что, несмотря на это, формула (2.86) дает достаточно точные результаты и при поперечном изгибе, поэтому в дальнейшем при определении нормальных напряжений не следует делать различия между чистым и поперечным изгибом.

2.11.8. Условие прочности по нормальным напряжениям

Согласно уравнению (2.86) наибольшие нормальные напряжения, которые могут привести к разрушению, возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси. Так как при прочностных расчетах определяются максимальные напряжения, то в формуле (2.86) вместо текущего значения y подставляют расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных волокон.

Наибольшие напряжения растяжения:

$$\sigma_{\max p} = \frac{M_{\text{и}} h_p}{J_z},$$

где h_p — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных волокон в растянутой зоне.

Наибольшие напряжения сжатия:

$$\sigma_{\max c} = \frac{M_{\text{и}} h_c}{J_z},$$

где h_c — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных сжатых волокон.

Таким образом, при несимметричном профиле, когда y_p не равно y_c и если материал балки по-разному реагирует на растяжение и сжатие, то условие прочности запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max p} \frac{M_{\text{и}} h_p}{J_z} &\leq [\sigma]_p \\ \sigma_{\max c} \frac{M_{\text{и}} h_c}{J_z} &\leq [\sigma]_c \end{aligned} \right\}, \quad (2.87)$$

где $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ — допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

Если профиль балки симметричный, т. е. $h_c = h_p$, а также в случае, когда материал одинаково сопротивляется и растяжению и сжатию, то достаточно определить только максимальное напряжение для тех волокон, которые наиболее удалены от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}} h_{\max}}{J_z}.$$

Если величина изгибающего момента по длине бруса меняется, то для определения максимальных напряжений необходимо брать то сечение, в котором действует максимальный момент. Такое сечение бруса называется опасным сечением.

Отношение момента инерции сечения относительно нейтральной оси J_z к расстоянию y_{\max} наиболее удаленного от этой оси волокна называется моментом сопротивления сечения при изгибе и обозначается W_z или в общем виде $W_{\text{и}}$:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (2.88)$$

Таким образом, в случае симметричного относительно нейтральной оси сечения балки, т. е. при $h_p = h_c = h/2$ или при одинаковых допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие $[\sigma]$, вместо двух формул (2.87) получим одну, выражающую условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (2.89)$$

Для стандартных профилей проката, таких как швеллер, двутавр, уголок, значения осевых моментов сопротивления приведены в таблицах сортамента.

Для прямоугольного сечения:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}. \quad (2.90)$$

Для квадратного сечения со стороной a :

$$W_z = \frac{a^3}{6}. \quad (2.91)$$

Для круглого сечения:

$$W_z = \frac{\pi D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3. \quad (2.92)$$

Для кольцевого сечения с наружным диаметром D и внутренним d :

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4), \quad (2.93)$$

где $\alpha = d/D$.

Используя уравнение (2.89), можно подобрать сечение профиля, исходя из условия прочности по нормальным напряжениям. Определим требуемый осевой момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_{\text{н}}}{[\sigma]}. \quad (2.94)$$

Затем по таблицам стандартных прокатных профилей или в соответствии с формулами (2.90)–(2.94) в зависимости от задания выбираем или рассчитываем сечение.

2.12. Сложное сопротивление

2.12.1. Совместное действие изгиба с кручением

На практике кручение часто сопровождается деформацией изгиба. С таким сложным видом деформации приходится иметь дело при расчете валов передач, когда силы, действующие на вал, не проходят через его ось.

Ведущее зубчатое колесо передает окружное усилие F_t на расстояние $d/2$ от центра колеса, т. е. от центра вала, на котором это колесо расположено (рис. 2.60).

Перенесем силу F_t в центр вала. Чтобы система сил была эквивалентной, приложим вторую силу F_t , направленную противоположно.

Получим в результате пару сил с моментом, равным $F_t \cdot d/2$, скручивающую вал, и силу F_t , которая вал изгибает.

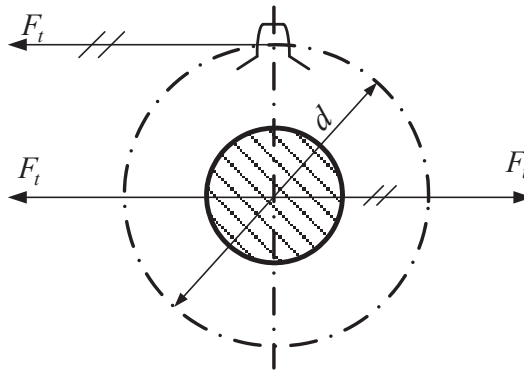


Рис. 2.60

Следовательно, в материале вала возникают нормальные напряжения от изгиба и касательные от кручения, которые определяются по известным зависимостям:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}; \quad \tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{п}}}.$$

Наибольшие напряжения от изгиба и от кручения возникают на поверхности вала (см. рис. 2.61). Каждое из них, взятое в отдельности, может быть меньше допускаемого для соответствующего вида деформации. Однако их одновременное действие может привести к разрушению вала.

Для оценки одновременного действия нормального напряжения σ от изгиба и касательного τ кручения выделим в наиболее опасном сечении у наиболее опасной точки a или b элемент материала (см. рис. 2.62, a). По четырем граням этого элемента действуют касательные напряжения, а по двум — еще и нормальные σ , следовательно, мы имеем случай плоского напряженного состояния. Для опреде-

ления главных напряжений (рис. 2.62, б) при плоском напряженном состоянии воспользуемся известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\max} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.95)$$

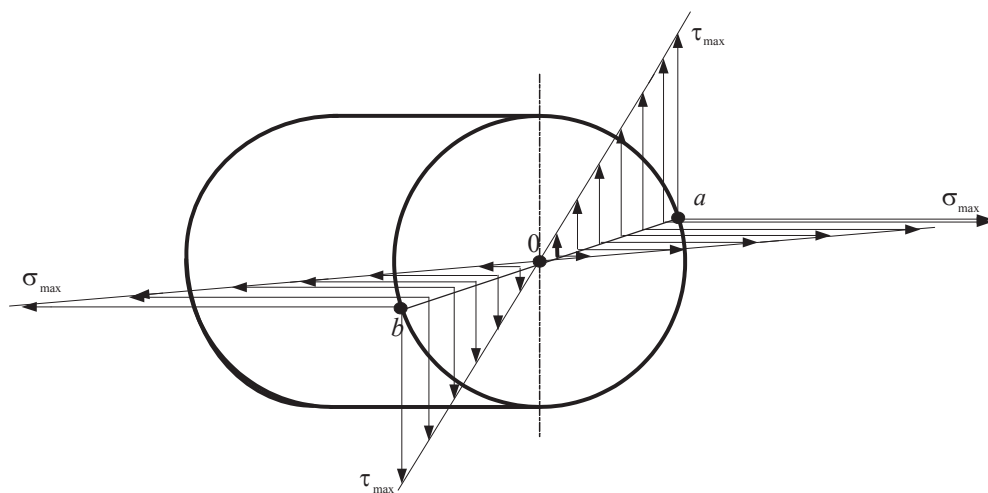


Рис. 2.61

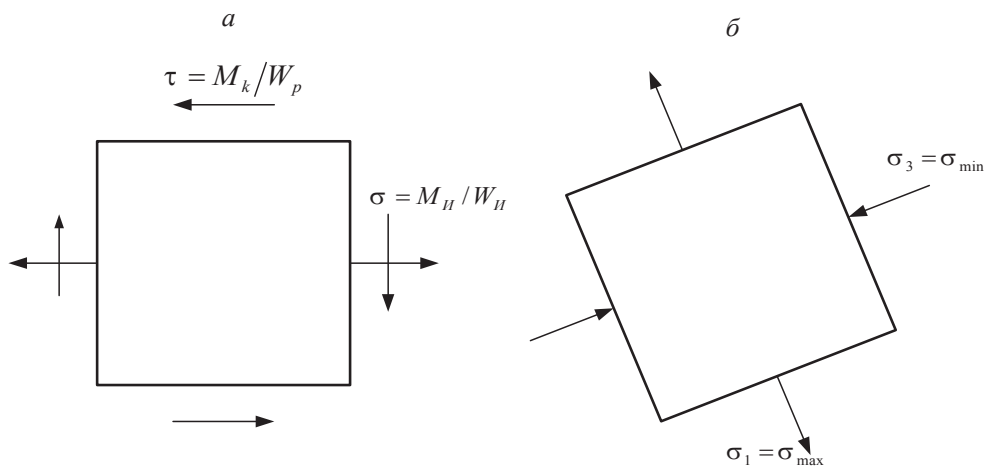


Рис. 2.62

В соответствии с третьей теорией прочности подставим в формулу (2.96) значения главных напряжений σ_1 и σ_2 из выражения (2.95) и получим следующую зависимость, выражающую условие прочности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.96)$$

Здесь $\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}} = \frac{M_{\text{и}}}{0,1d^3}$, $\tau = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{0,2d^3}$, где d — диаметр вала в расчетном сечении. Подставим значения σ и τ в формулу (2.96):

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{0,1d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{0,2d^3}\right)^2} = \frac{1}{0,1d^3} \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_k^2} \leq [\sigma]. \quad (2.97)$$

Обозначим $\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_k^2}$ через $M_{\text{пр}}$ — приведенный момент. Тогда условие прочности по третьей теории можно записать в виде:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{0,1d^3} \leq [\sigma]. \quad (2.98)$$

Из выражения (2.98) получаем зависимость для определения диаметра вала по третьей теории прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр}}}{0,1[\sigma]}}. \quad (2.99)$$

В случае, если вал испытывает изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то изгибающий момент определяем по формуле

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_{\text{и}_x}^2 + M_{\text{и}_y}^2}. \quad (2.100)$$

По четвертой теории условие прочности для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (2.101)$$

Подставляя значения главных напряжений σ_1 и σ_2 , выраженных через напряжения от изгиба и от кручения (формулы (2.95)), получим

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.102)$$

Следовательно:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{1}{0,1d^3} \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2} \leq [\sigma]. \quad (2.103)$$

Таким образом, приведенный момент по четвертой теории прочности определяется по формуле:

$$M_{\text{пр}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}. \quad (2.104)$$

Диаметр вала определяют по формуле (2.99), подставляя полученное значение $M_{\text{пр}}$ по четвертой теории прочности.

Расчет по третьей теории рекомендуется применять при расчете нереверсивных валов, по четвертой — для реверсивных.

Допускаемое напряжение принимают для валов, выполненных из углеродистой стали, в пределах 60 МПа либо определяют в зависимости от предела прочности по формуле:

$$[\sigma] = 0,088\sigma_{\text{в}}. \quad (2.105)$$

Оценка прочности и определение диаметра вала по четвертой (энергетической) теории прочности производится по формулам (2.98) и (2.99), в которые должен быть подставлен приведенный момент, рассчитанный по выражению (2.104).

Отметим, что формула (2.103) для третьей и четвертой теорий прочности дает практически один и тот же результат, так как полученный при расчете диаметр вала должен быть округлен до стандартного значения в соответствии с нормальным рядом линейных размеров по ГОСТ 6636–69.

2.12.2. Сочетание изгиба с растяжением или сжатием

До сих пор при рассмотрении изгиба балок предполагалось, что внешние силы, действующие на балку, перпендикулярны к ее оси. Рассмотрим более общий случай, когда изгибающая сила, действующая на балку, наклонна к ее оси.

На балку, защемленную одним концом, действует сила F в плоскости продольной симметрии балки под углом α к оси балки (рис. 2.63).

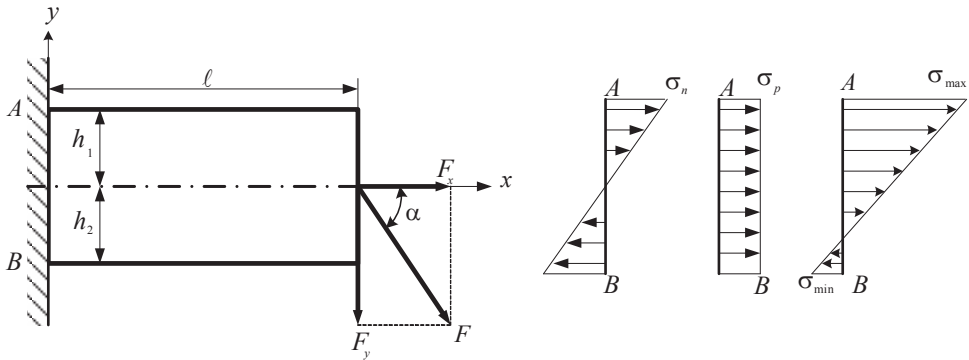


Рис. 2.63

Разложим силу F на две составляющие F_x и F_y . Сила F_y , перпендикулярная к оси, вызывает изгиб балки, а сила F_x , действующая вдоль оси, вызывает в балке растяжение.

Нормальное напряжение, вызываемое силой F_x , во всех поперечных сечениях балки одинаково и распределено по сечению равномерно.

$$\sigma_p = \frac{F_x}{A}.$$

Напряжения изгиба зависят от величины момента. Наибольший изгибающий момент будет в защемлении, поэтому наиболее опасным сечением будет сечение, граничащее с защемлением. Максимальные напряжения в этом сечении:

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{F_y \cdot l \cdot h_1}{J_z} \quad \text{— напряжение растяжения в верхних крайних во-}$$

локнах;

$$\sigma'_{\text{и}} = \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z} \quad \text{— напряжение сжатия в нижних крайних волокнах.}$$

Суммарное напряжение в точке A :

$$\sigma_{\max} = \frac{F_x}{A} + \frac{F_y \cdot l \cdot h_1}{J_z}. \quad (2.106)$$

Для точки B :

$$\sigma_{\min} = \frac{F_x}{A} - \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}. \quad (2.107)$$

Напряжение $\sigma_{\min} > 0$, если $\frac{F_x}{A} > \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}$; $\sigma_{\min} < 0$, если $\frac{F_x}{A} < \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}$;

$$\sigma_{\min} = 0 \text{ при } \frac{F_x}{A} = \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}.$$

Таким образом, знак σ_{\min} зависит от соотношения напряжений F_x/A и $\frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}$. Эпюра напряжений приведена на рис. 2.63 ($|\sigma_{\text{II}}| > \sigma_p$).

В частном случае, когда $h_1 = h_2 = h$, имеем:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_x}{A} + \frac{F_y \cdot l}{W_{\text{II}}};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_x}{A} - \frac{F_y \cdot l}{W_{\text{II}}}.$$

Если составляющая F_x не растягивает, а сжимает балку, тогда:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_x}{A} + \frac{F_y \cdot l \cdot h_1}{J_z};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_x}{A} - \frac{F_y \cdot l \cdot h_2}{J_z}.$$

В этом случае предполагаем, что балка настолько жестка, что прогибы незначительны и сила F_x , сжимающая балку, все время действует параллельно оси балки, не вызывая ее искривления, т. е. не дает момента относительно нейтральной оси поперечного сечения.

Глава 3.

Структура механизмов

Машиной или машинным агрегатом называют устройство, выполняющее механические движения для осуществления каких-либо рабочих процессов (транспортирования, преобразования энергии и материалов и т. п.). Функциональная схема машины представлена на рис. 3.1.

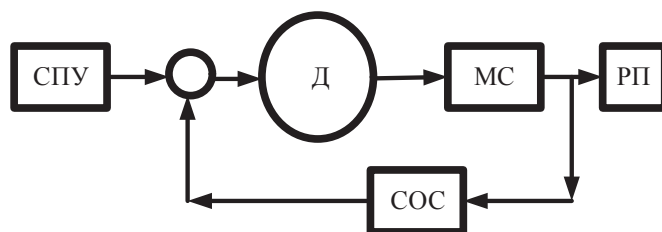


Рис. 3.1

Машина состоит из следующих функциональных частей: двигателей *Д*, системы механизмов *МС*, рабочего процесса *РП*, системы управления, включающей систему программного управления *СПУ* и систему обратной связи *СОС*.

Машиной называется устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. В зависимости от вида выполняемых рабочих процессов машины делятся на несколько классов. *Технологические машины* (металлообрабатывающие станки и комплексы, бумагоделательные и печатные машины, прокатное оборудование и т. п.) предназначены для обработки исходных материалов (сырья) и превращения их в готовые изделия. *Транспортные машины* выполняют транспортные операции. *Энергетические машины* осуществляют преобразование одного вида энер-

гии в другой. *Информационные машины* (графопостроители, печатные устройства, ЭВМ и т. п.) осуществляют механические движения для передачи и преобразования информации. Сложные машины часто называются *машинными агрегатами*.

Машина осуществляет свои функции посредством *механизмов*, передающих и преобразовывающих заданное механическое движение входного тела в требуемое движение выходного тела.

3.1. Основные понятия и определения

Современные методы кинематического и динамического исследования механизмов определяются их структурой. Поэтому анализ любого механизма начинается с изучения его строения и классификации.

Рассмотрим вначале основные понятия и определения, которыми будем пользоваться при изучении курса теории механизмов и машин.

Деталь — часть машины, изготовленная без сборочных операций.

Звено — одна или несколько деталей, жестко соединенных между собой и перемещающихся при работе машины как одно целое. Изменение положения нагрузок не влияет на расстояние между точками звена. В рамках нашего курса звено рассматривается как абсолютно жесткое тело. Например, шатун двигателя является одним подвижным звеном, хотя и состоит из нескольких деталей.

Стойка — неподвижное звено (станина, корпус).

При решении инженерных задач анализа и синтеза механизмов изображение механизма упрощают, абстрагируясь от реальных форм звеньев и кинематических пар, ограничиваясь их условным изображением. Такое упрощенное изображение механизма называют структурной или кинематической схемой механизма. Для изображения схем используют графические изображения, установленные ЕСКД (ГОСТ 2.701; ГОСТ 2.703; ГОСТ 2.721). Условные изображения подвижного звена и стойки показаны на рис. 3.2, *а* и *б*. В табл. 3.1 приведено условное изображение наиболее распространенных подвижных звеньев рычажных механизмов.

Входное звено — это звено, которому сообщается движение для преобразования в требуемые движения других звеньев.

Выходное звено — это звено, совершающее движение, для которого создан механизм. Все остальные звенья являются промежуточными или соединительными.

Начальное звено — это звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат.

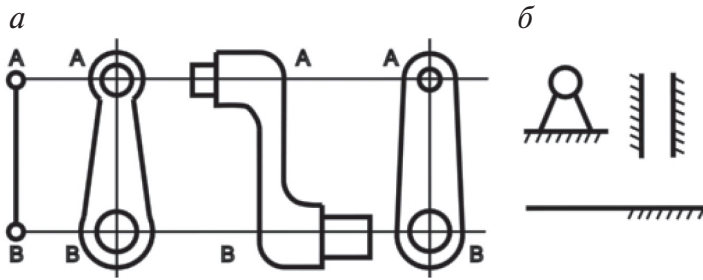


Рис. 3.2

Таблица 3.1

Условное обозначение звеньев на схемах механизмов

№ условно- го изобра- жения звена	1	2	3	4	5	6	7
Условное обозначение звена							

В зависимости от характера движения относительно стойки подвижные звенья имеют следующие названия [3, с. 5]:

1. Кривошип — звено механизма, совершающее полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой.

2. Коромысло — звено механизма, совершающее неполный оборот вокруг оси, связанной со стойкой.

3. Шатун — звено механизма, совершающее плоскопараллельное движение.

4. Ползун — звено, поступательно перемещающееся относительно стойки или другого подвижного звена.

5. Кулиса — звено, которое является направляющей для ползуна.

6. Кулачок — звено с профилем переменной кривизны, который определяет закон движения ведомого звена (толкателя).

7. Зубчатое колесо — звено с замкнутой системой зубьев, которое обеспечивает за полный оборот непрерывное движение парного звена.

Кинематическая пара — подвижное соединение двух звеньев.

Точки, линии или поверхности, по которым происходит соприкосновение звеньев, называются элементами кинематической пары.

Из определения кинематической пары следует, что ее существование определяется тремя условиями: наличием двух звеньев, их непосредственным контактом, возможностью относительного перемещения одного звена относительно другого. Кинематическая пара перестает существовать, если нарушено хотя бы одно из этих условий.

Способ соединения звеньев накладывает на относительное движение каждого звена (положение, скорость) кинематической пары ограничения, которые должны выполняться при любых силах, действующих на звенья. Эти ограничения называются связями. Следует отметить, что любую связь можно отбросить, заменив ее действие реакцией.

Известно, что свободное тело в пространстве обладает 6 степенями свободы. Число условий связи S , наложенных на относительное движение звена кинематической парой, может изменяться в пределах $1 \leq S \leq 5$.

Подвижность кинематической пары (H) — число степеней свободы в относительном движении звеньев, образовавших эту пару. Различают одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные кинематические пары. Следовательно, имеет место соотношение

$$H = 6 - S.$$

3.2. Классификация кинематических пар

Для удобства структурного анализа механизмов кинематические пары классифицируются по различным признакам [3, с. 6]:

- По числу условий связей пары делят на 5 классов (терминология И. И. Артоболевского), номер класса равен количеству связей, наложенных на относительное движение звеньев.
- По виду элементов пары делят на низшие и высшие. К низшим относят кинематические пары, элементами которых являются поверх-

ности (рис. 3.3, *в*, *г*). Элементами высших пар являются линии или точки (рис. 3.3, *а*, *б*).

- По характеру относительного движения звеньев различают поступательные и вращательные кинематические пары.

4. Различают кинематические пары с силовым замыканием (соприкосновение звеньев обеспечивается действием какой-либо силы, например, веса или пружины) и кинематическим (постоянный контакт звеньев достигается за счет конструктивной формы элементов).

На рис. 3.3 изображены пары I, II, III и IV классов. Рассмотрим их подробнее.

Пара I класса (рис. 3.3, *а*) — шар на плоскости. Наложено одно условие связи: исключено поступательное движение вдоль оси «*Z*».

Пара II класса (рис. 3.3, *б*) — цилиндр на плоскости. Наложено два условия связи: исключено поступательное движение вдоль оси «*Z*» и вращательное вокруг оси «*X*».

Пара III класса (рис. 3.3, *в*) — шаровой цилиндр. Наложено три условия связи: исключены поступательные движения вдоль всех трех осей.

Пара IV класса (рис. 3.3, *г*) — втулка на валике. Наложено четыре условия связи, исключены поступательные и вращательные движения вдоль осей «*X*» и «*Z*».

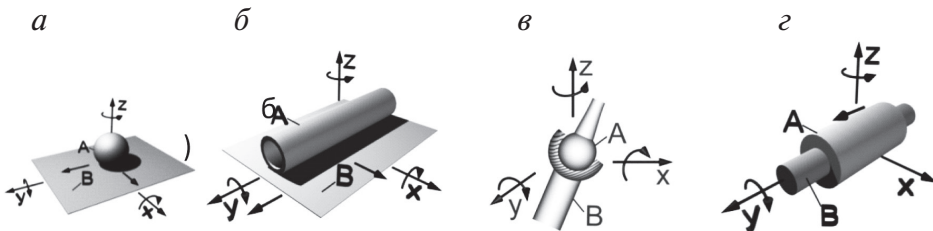


Рис. 3.3

На рис. 3.4 показаны пары V класса:

1) Вращательная (см. рис. 3.4, *а*) — цилиндрический шарнир. Наложено пять условий связи: исключены все движения, кроме вращательного.

2) Поступательная (см. рис. 3.4, *б*) — наложено пять условий связи: исключены все движения, кроме одного поступательного.

3) Винтовая (см. рис. 3.4, *в*) — наложено пять условий связи: исключены все движения, кроме поступательного. (Вращение не вносит

степени свободы, т. к. в данном случае поступательное и вращательное движения зависимы)

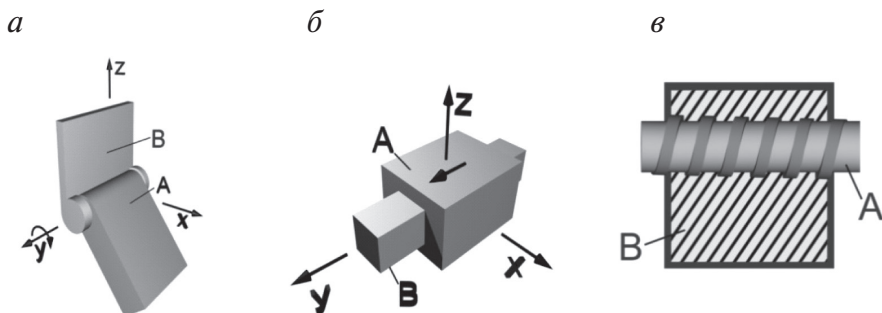


Рис. 3.4

3.3. Кинематическая цепь. Механизм

Степень подвижности механизма

Кинематической цепью называется система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

Кинематические цепи могут быть плоскими и пространственными. В плоских цепях все звенья перемещаются либо в одной, либо в параллельных плоскостях. Все другие цепи будут пространственными. Кинематические цепи могут быть открытыми (рис. 3.5, а) и замкнутыми (рис. 3.5, б).

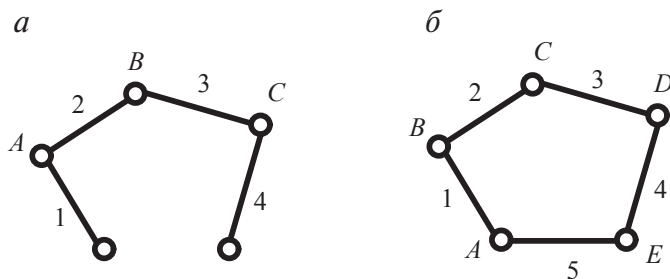


Рис. 3.5

Механизмом называется кинематическая цепь с одним неподвижным звеном — стойкой, в которой при заданном законе движения од-

ного или нескольких звеньев все остальные звенья будут перемещаться по вполне определенным законам.

Структурной схемой механизма называется безмасштабная схема механизма, предназначенная для исследования его структуры.

Структурная схема механизма может существенно отличаться от его реального конструктивного исполнения. Например, на рис. 3.6 и 3.7 показаны общие виды двух щековых дробилок. На рис. 3.8 — структурные схемы этих дробилок. Рис. 3.8, *а* соответствует конструкции, изображенной на рис. 3.6, рис. 3.8, *б* — конструкции, представленной на рис. 3.7.

Обобщенная координата механизма — независимая координата, однозначно определяющая положение всех звеньев механизма относительно стойки. На механизмах, изображенных на рис. 3.8, угол поворота входного звена — кривошипа, обозначенного стрелкой, полностью определяет положение остальных звеньев, если заданы их длины. Поэтому угол поворота кривошипа является обобщенной координатой механизма.

Степенью подвижности механизма называется число степеней свободы относительно стойки, т. е. неподвижного звена. Число степеней подвижности W равно числу обобщенных координат механизма, показывает скольким звеньям нужно задать независимые движения. При $W = 1$ механизм имеет только одно входное звено.

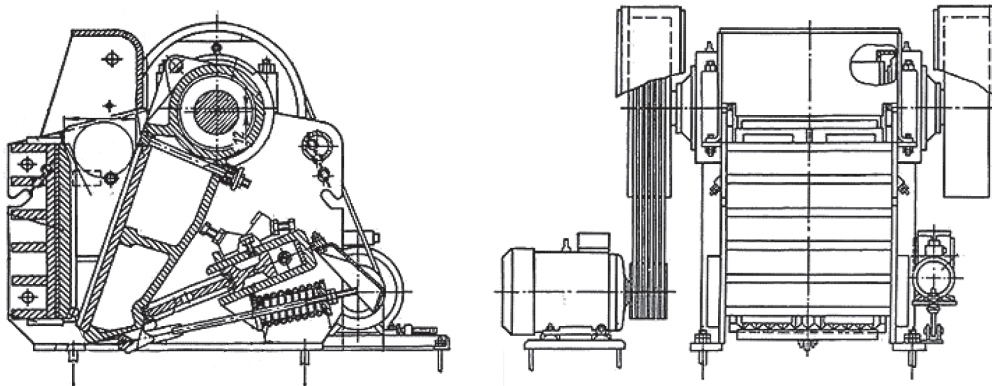


Рис. 3.6

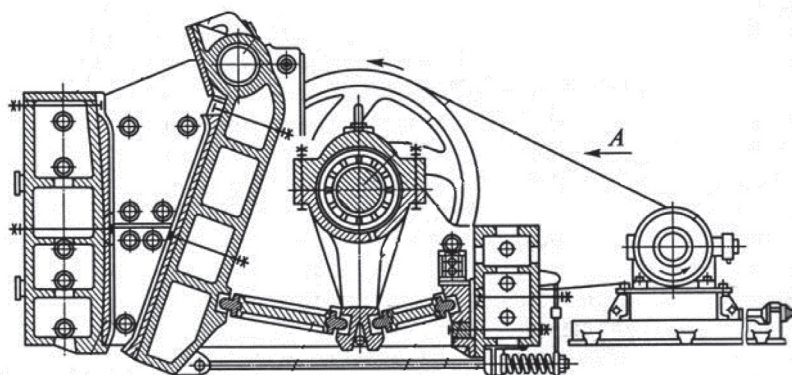


Рис. 3.7

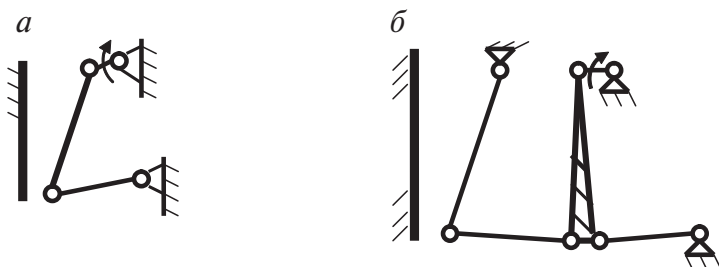


Рис. 3.8

Для определения степени подвижности механизма в зависимости от его строения служат структурные формулы. В общем случае для пространственного механизма (структурная формула Сомова–Малышева):

$$W_{\text{пр}} = 6n - S = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (3.1)$$

где n — число подвижных звеньев, S — число условий связи, p_5 — число пар 5-го класса, p_4 — число пар 4-го класса, p_3 — число пар 3-го класса, p_2 — число пар 2-го класса, p_1 — число пар 1-го класса.

3.4. Кинематические соединения

Кинематические пары просты и компактны. Однако в элементах кинематических пар происходит значительный износ из-за больших сил трения скольжения. Поэтому кинематические пары часто заменяют более длинными цепями, которые в совокупности реализуют такое же относительное движение звеньев, что и заменяемая кинематическая пара.

Кинематическая цепь, предназначенная для замены кинематической пары, называется кинематическим соединением.

Например, кинематическим соединением, заменяющим вращательную пару, является подшипник с телами качения. Роликовые направляющие могут заменить поступательную кинематическую пару.

Кинематические соединения удобнее и надежнее в эксплуатации и позволяют механизмам работать при больших нагрузках и высоких скоростях перемещений звеньев.

3.5. Плоские механизмы

Механизмы, траектории точек звеньев которых расположены в одной или параллельных плоскостях, называются плоскими. В технике такие механизмы нашли наиболее широкое применение.

Звено, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, соответственно n свободных звеньев — $3n$ степеней свободы. Если конструировать плоскую кинематическую цепь из n звеньев с числом пар пятого класса p_5 и пар четвертого класса p_4 , то общее число условий связи $S = 2p_5 + p_4$, поскольку одна пара пятого класса при плоском движении наложит два условия связи, а пара четвертого класса — одну.

$$W_{\text{пл}} = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (\text{формула Чебышева}). \quad (3.2)$$

В плоском механизме кинематические пары пятого класса являются низшими, а пары четвертого — высшими. Тогда формула Чебышева примет вид:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3n - 2p_{\text{Н}} - p_{\text{В}},$$

где $p_{\text{Н}}$ и $p_{\text{В}}$ — соответственно число пар низших и высших.

В состав плоского механизма не могут входить пары третьего, второго и первого класса, поскольку движение каждого звена ограничено в этом случае наложением трех общих условий связи.

3.6. Классификация плоских механизмов

В основу классификации положено требование единства методики кинематического и силового анализа механизмов. Этому требованию соответствует структурная классификация механизмов, разработанная профессором Л. В. Ассуром в 1916 году и получившая дальнейшее развитие в трудах академика И. И. Артоболевского. Основная идея Л. В. Ассура состоит в том, что любой механизм может быть создан путем присоединения к начальному звену (или начальным звеньям) и стойке кинематических цепей нулевой подвижности, называемых структурными группами (группами Ассура) [3, с. 13].

По классификации И. И. Артоболевского начальное звено и стойка, образующие кинематическую пару пятого класса, являются механизмом 1-го класса (рис. 3.9). Группой Ассура называется кинематическая цепь, степень подвижности которой после присоединения ее свободных элементов к стойке равна нулю при условии, что она не распадается на более простые группы Ассура.

На рис. 3.10, *а*, *б*, *в* представлены простейшие группы, состоящие из двух звеньев. Для них $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$, если свободные элементы присоединить к стойке (рис. 3.10, *б*). В этом случае группа превращается в ферму.

Для групп с парами только 5-го класса

$$W_{\text{гр}} = 3n - 2p_5 = 0, \text{ т. е. } n = 2p_5 / 3,$$

при этом n и p_5 — целые числа.

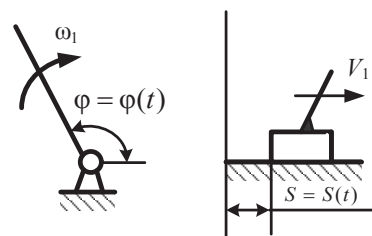


Рис. 3.9

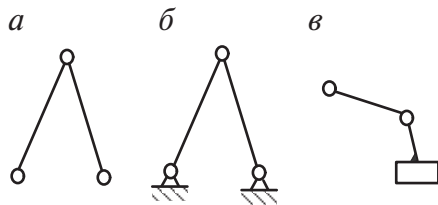


Рис. 3.10

На рис. 3.11 представлены механизмы, образованные путем присоединения к механизму 1-го класса и стойке групп Ассра.

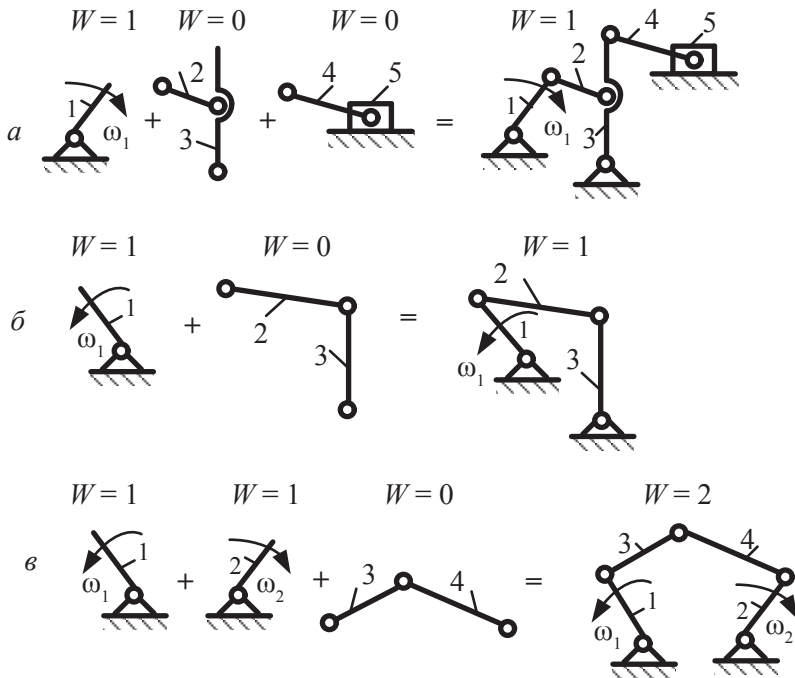


Рис. 3.11

Поскольку степень подвижности групп Ассра равна нулю, степень подвижности механизма равна числу начальных (ведущих звеньев) или числу механизмов 1-го класса. Например, для механизмов, представленных на рис. 3.11, а, б, степень подвижности $W=1+0=1$. При двух механизмах первого класса и одной присоединенной группе (рис. 3.11, в) степень подвижности механизма равна $W=1+0+1=2$.

Класс группы определяется наивысшим по классу контуром, входящим в ее состав.

Класс контура равен числу кинематических пар, входящих в замкнутый контур.

Порядок группы равен числу свободных элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к механизму.

На рис. 3.12 представлены группы Ассра различных классов. Звеньями этих групп образованы контуры:

в группе ABC (см. рис 3.12, а) — контур AB или BC содержит 2 кинематические пары, следовательно, является контуром 2-го класса;

в группе $ABCDEF$ (рис. 3.12, б) — контур BCE 3-го класса;
 в группе $ABGDEF$ (рис. 3.12, в) — контур $BCEF$ 4-го класса;
 в группе $ABCDEFGHKL MN$ (рис. 3.12, г) можно отыскать два контура 5-го класса $BCDEF$ и $DGLNH$, которые содержат по 5 кинематических пар.

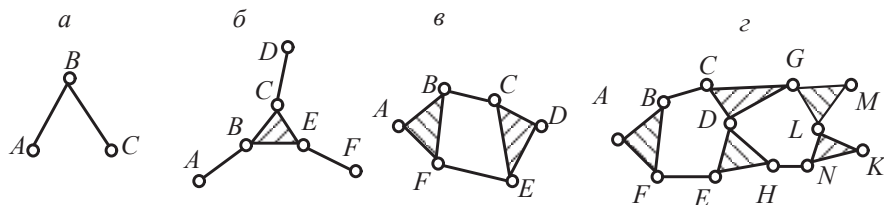


Рис. 3.12

Сочетание чисел $n = 2$ и $p_5 = 3$ характерно для структурных групп 2-го класса, сочетание $n = 4$, $p_5 = 6$ при наличии трех поводков и одного базисного звена — для групп 3-го класса.

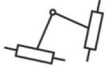
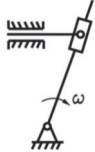

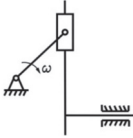
В практике синтеза механизмов наибольшее распространение получили группы второго класса. В зависимости от числа и взаимного расположения вращательных и поступательных кинематических пар различают 5 видов структурных групп 2-го класса (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Виды групп Ассура второго класса

№ п/п	Схема группы	Вид и расположение пар	Пример образованных механизмов	Название механизма
1		Все пары вращательные		Шарнирный четырехзвенник
2		Две пары вращательные		Кривошипно-ползунный
3		Две пары вращательные		Кулисный

Окончание табл. 3.2

№ п/п	Схема группы	Вид и расположение пар	Пример образованных механизмов	Название механизма
4		Две пары поступательные, одна вращательная		Кулисно-ползунный (тангенсный)
5		Две пары поступательные, одна вращательная		Механизм двойного ползуна (синусный)

3.7. Последовательность структурного анализа механизма

Цель структурного анализа: убедиться в определенности движения звеньев (структурной работоспособности) механизма и выявить строение механизма.

Структурная работоспособность механизма характеризуется следующими показателями: степень подвижности механизма должна быть равна числу начальных звеньев; в составе механизма не должно быть звеньев, не входящих в группы Ассур или механизм 1-го класса.

Последовательность действий:

1. Построить кинематическую схему механизма.
2. Подсчитать число звеньев и кинематических пар. Определить степень подвижности W механизма.

3. Выявить пассивные связи и лишние степени свободы. Устранить их. Повторно определить W .

4. Заменить высшие пары кинематическими цепями, содержащими низшие пары. Проверить W .

5. Расчленить механизм на группы Ассур, руководствуясь следующими правилами:

- 5.1. Первой отделяется группа, наиболее отдаленная от начального звена.

- 5.2. Вначале следует попытаться отделить группу второго класса, если это невозможно, то третьего и т. д.

5.3. После отсоединения группы следует проверить, не изменилась ли кинематика, а также степень подвижности оставшейся части механизма. Каждая кинематическая пара принимается в расчет только один раз: либо с отсоединенной группой, либо с оставшейся частью механизма.

5.4. Определить класс, вид и порядок каждой отсоединенной группы, а также класс механизма.

Класс механизма численно равен высшему классу группы Ассур, входящей в состав механизма.

Пример: Произвести структурный анализ механизма толкателя (рис. 3.13)

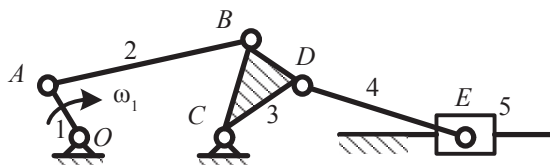


Рис. 3.13

Механизм плоский, $n = 5$, $p_5 = 7$ (шесть вращательных пар и одна поступательная пара, расположенная в точке E), $p_4 = 0$.

Степень подвижности механизма определяется по формуле Чебышева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Лишних степеней свободы и пассивных связей нет. Так как механизм обладает одним начальным звеном, все ведомые звенья будут перемещаться вполне определенным образом. Следовательно, механизм структурно работоспособен.

Рассматриваемый механизм состоит из механизма 1-го класса и последовательно присоединенных двух групп Ассур второго класса 2-го и 1-го видов (рис. 3.14). Таким образом, механизм относится ко второму классу.

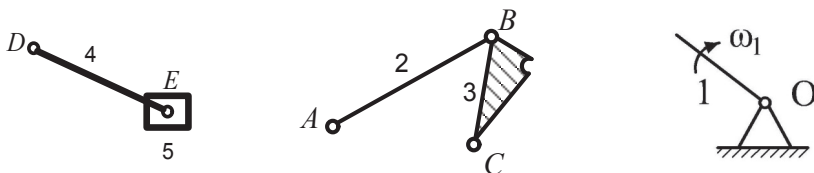


Рис. 3.14

Глава 4.

Основы проектирования деталей и узлов машин

Современные машины обеспечивают многократное повышение производительности труда человека. В настоящее время строят машины-двигатели и машины-преобразователи энергии мощностью свыше одного миллиона киловатт, в то время как человек длительно может развивать мощность не более 0,1 кВт.

Машины настолько прочно вошли в жизнь общества, что сейчас трудно найти предмет или продукт потребления, который был бы изготовлен или доставлен к месту потребления без помощи машин. Без машин было бы невозможно современное развитие науки и техники, невозможны высокие темпы строительства.

Машиностроение занимает ведущее место среди других отраслей. Это объясняется тем, что основные производственные процессы выполняют машины. Технический уровень всех отраслей народного хозяйства определяется уровнем машиностроения.

Создание современных машин требует глубокого изучения вопросов конструирования, теории, расчета деталей машин на прочность и долговечность.

В курсе «Детали машин» изучаются именно такие вопросы применительно к деталям машин общего назначения. Курс «Детали машин» охватывает также совокупность совместно работающих деталей, представляющих собой конструктивно обособленные единицы, объединенные общим назначением, — **узлов** или **сборочных единиц**. Характерными примерами узлов являются редукторы, муфты, подшипники.

Деталь — составная часть машины, изготовленная из однородного материала без применения сборочных операций (пример: вал, втулка, шестерня).

Большинство типов деталей является общим для всех машин, что делает целесообразным их изучение в самостоятельном курсе «Детали машин».

Рассмотрим самую общую классификацию деталей машин.

Выполнение машин и их звеньев из различных деталей вызывает необходимость соединения последних между собой. Отсюда первой группой деталей является группа соединительных деталей — **соединений**. Соединения могут быть разъемные и неразъемные.

Всякая машина состоит из двигательного, передаточного и исполнительного механизмов. Наиболее общим для всех машин являются передаточные механизмы.

Передачи вращательного движения являются механизмами, предназначенными для передачи энергии с одного вала на другой, как правило, с преобразованием угловых скоростей и с соответствующим изменением крутящих моментов.

Вращающиеся детали передач — зубчатые колеса, шкивы, звездочки — установлены на валах. **Валы** служат для передачи крутящего момента вдоль своей оси и для поддержания указанных деталей. Для поддержания вращающихся деталей без передачи полезных крутящих моментов служат **оси**.

Выходные концы валов соединяются в машине с помощью **муфт**, при этом соединения в муфтах бывают постоянными, т. е. не допускающими разъединения во время работы машин, и сцепными. Валы и оси вращаются в **подшипниках**. Они делятся на подшипники качения и скольжения.

Подшипники, в свою очередь, базируются на **корпусных деталях**.

В большинстве машин используются упругие элементы — **пружины и рессоры**. Они применяются для защиты от вибраций и ударов, для прижатия деталей, для совершения работы в течение длительного времени путем аккумулялирования энергии.

Долговечность машин в значительной степени определяется **смазками** трущихся поверхностей и **устройствами для защиты от загрязнений и для смазки**.

Важную группу составляют детали и механизмы управления.

4.1. Этапы проектирования изделия

Проектирование — процесс разработки комплекса технической документации, необходимой для производства изделия. Единая система конструкторской документации (ЕСКД) предусматривает пять стадий проектирования.

- **Техническое задание** — назначение технических характеристик и показателей качества, предъявляемых к изделию.
- **Техническое предложение** — техническое и технико-экономическое обоснование целесообразности разработки проекта на основе рассмотрения вариантов возможных решений.
- **Эскизный проект** — совокупность конструкторских документов, содержащих принципиальные конструктивные решения, дающие общее представление об устройстве, принципе действия, основных параметрах и габаритах.
- **Технический проект** — совокупность конструкторских документов, содержащих окончательные технические решения, дающих полное представление об устройстве изделия, и исходные данные для разработки рабочей конструкторской документации.
- **Разработка технической документации** включает чертежи узлов и деталей, спецификации, технические условия на изготовление, сборку, испытание изделия и т. д.

4.2. Основные требования к машинам

Машины должны быть работоспособными, надежными, технологичными, патентоспособными и обладать достаточным уровнем стандартизации.

Надежность — свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки. Надежность изделия обуславливается безотказностью, долговечностью, ремонтопригодностью и сохраняемостью. Одной из количественных характеристик надежности машин и их деталей является вероятность безотказной работы. Ее можно приближенно оценить по формуле:

$$P(t) = 1 - \frac{N(t)}{N},$$

где $P(t)$ — вероятность безотказной работы до момента времени t ; N — число машин (деталей), подвергнутых испытанию; $N(t)$ — число машин, отказавших к моменту времени t .

Для расчета надежности электромеханических систем в течение основного рабочего периода в первом приближении используется хорошо согласующийся с опытными данными экспоненциальный закон распределения времени между отказами, который характеризуется постоянной интенсивностью отказов $\lambda(t)$. Вероятность безотказной работы $P(t)$ в зависимости от времени и среднее время наработки на отказ t_m определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= e^{-\lambda_0 t} \\ t_m &= \lambda_0^{-1} \end{aligned} \right\}.$$

Опытные значения интенсивности отказов λ часто встречающихся элементов механических систем приводятся в табл. 4.1.

Вероятность безотказной работы механической системы при последовательном соединении m независимых элементов

$$P_m(t) = \prod_{i=1}^m P_i(t).$$

Таблица 4.1

Интенсивности отказов λ_0 элементов механических передач 10^5

Наименования	Средняя λ_0	Наибольшая λ_0	Наименьшая λ_0
Двигатели асинхронные	0,860	1,120	0,450
Передачи механические:			
Зубчатые одноступенчатые	0,012	0,020	0,001
Червячные	0,090	0,600	0,080
Ременные	0,380	1,500	0,014
Коробка передач	0,068	0,430	0,005
Корпуса редукторов	0,020	0,040	0,010
Подшипники качения	0,050	0,100	0,002
Подшипники скольжения	0,020	0,040	0,001
Валы и оси	0,030	0,062	0,015
Муфты	0,040	0,110	0,006

Для экспоненциального закона распределения при последовательном соединении m независимых элементов вероятность безотказной работы механической системы равна:

$$P(t) = e^{(-\lambda_{\Sigma} t)},$$

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_i^m \lambda_i t,$$

где $\lambda_{\Sigma} = \sum_i^m \lambda_i t$ — интенсивность отказов всей системы.

Технологичность — соответствие изделия требованиям производства и эксплуатации при максимальной производительности труда и минимальных материальных затратах.

Стандартизация и унификация. Стандартизацией называется процесс применения стандартов при проектировании и изготовлении машин. Наиболее распространенным методом стандартизации является **унификация** — рациональное сокращение числа объектов одинакового функционального назначения и сведение к минимуму типоразмеров деталей и их элементов.

4.2.1. Основные критерии работоспособности и расчета деталей машин

Детали машин при минимальной стоимости их изготовления и эксплуатации должны быть работоспособными в течение определенного времени. Определение размеров и материала этих деталей производится по критериям, соответствующим условиям работы такой детали. **Основными критериями работоспособности деталей считаются прочность, жесткость, устойчивость, износостойкость, виброустойчивость, теплостойкость.**

Прочность является важнейшим критерием работоспособности деталей машин. Прочностью называется способность материала противостоять внешним нагрузкам без разрушения. Обычно под этим понимают сопротивление пластическим деформациям. Расчетные напряжения должны быть такими, чтобы обеспечить прочность дета-

ли при минимальной затрате материала. Основные зависимости для определения расчетных напряжений при различных видах деформации рассмотрены в табл. 4.2. Наиболее распространенным методом оценки прочности деталей машин является сравнение расчетных напряжений, возникающих в деталях машин при действии эксплуатационных нагрузок, с допускаемыми напряжениями (см. п. 2.7.2).

Распространенным методом оценки прочности деталей машин является также сравнение действительного коэффициента запаса прочности S с допускаемым $[S]$. В этом случае условие прочности рассчитываемой детали выражается неравенством:

$$S \geq [S].$$

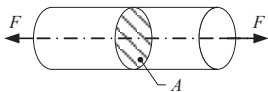
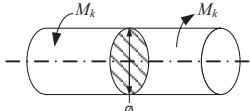
Проектный и проверочный расчеты

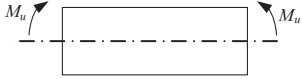
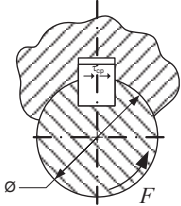
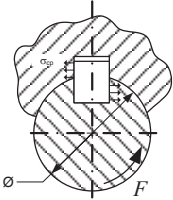
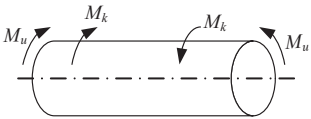
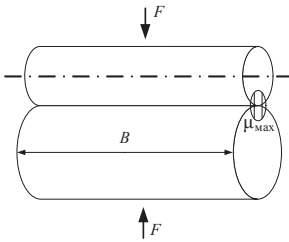
Расчет по допускаемым напряжениям обычно выполняется как проектный, служащий для определения основных размеров детали. Расчет по запасу прочности выполняется как проверочный, уточненный на той стадии, когда уже имеется чертеж детали и возможность учесть концентраторы напряжений, масштабный фактор и т. д.

Напряжения в деталях могут быть постоянными или переменными во времени. При расчетах на прочность деталей, выполненных из пластичных материалов, воспринимающих постоянные напряжения, в качестве предельного напряжения $\sigma_{\text{пред}}$ или $\tau_{\text{пред}}$ принимают предел текучести материала σ_T или τ_T . При расчетах деталей из хрупких материалов в качестве предельного напряжения принимают предел прочности материала σ_B .

Таблица 4.2

Формулы для расчета тел на прочность

Вид деформации	Эскиз	Расчетные формулы
Растяжение-сжатие		$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$, где A — площадь поперечного сечения
Кручение		$\tau = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$, для круга $W_p = 0,2d^3$

Вид деформации	Эскиз	Расчетные формулы
Изгиб		$\sigma = \frac{M_u}{W_u} \leq [\sigma]_u, W_u = 0,1d^3 \text{ для круга,}$ $W_u = \frac{bh^2}{6} \text{ для прямоугольника}$
Сдвиг		$\tau_{cp} = \frac{F}{A_{cp}} \leq [\tau_{cp}], \text{ где } A_{cp} \text{ — площадь}$ <p>поверхности среза</p>
Смятие		$\sigma_{cm} = \frac{F}{A_{cm}} \leq [\sigma_{cm}], \text{ где } A_{cm} \text{ — площадь}$ <p>поверхности смятия.</p>
Совместное действие нормальных и касательных напряжений		$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^4} \leq [\sigma]$
Контактные напряжения в зоне контакта цилиндров		$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{FE'}{Br'}} \leq \sigma_{HP}$ $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ $E' = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}$

Рассчитывая на прочность детали машин при переменных напряжениях, в качестве предельного напряжения принимают предел выносливости σ_r , где $r = \sigma_{мин}/\sigma_{max}$ — коэффициент асимметрии цикла. Для симметричного цикла $r = -1$, тогда имеем предел выносливости σ_{-1} .

Пределом выносливости называют наибольшее переменное напряжение, при котором не происходит разрушения образца после действия базового количества циклов нагружений.

Для выбора допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности в машиностроении пользуются двумя методами: табличным и дифференциальным.

Табличный метод конкретней, проще и удобнее, поэтому его используют всегда, когда имеются специализированные таблицы допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности, составленные для отдельных узлов и деталей.

Дифференциальный метод заключается в том, что допускаемое напряжение или допускаемый коэффициент запаса прочности определяют по соответствующей формуле, которая учитывает различные факторы, влияющие на прочность рассчитываемой детали.

Жесткость — способность детали сопротивляться изменению формы и размеров под действием нагрузок. Различают объемную и контактную жесткости. При расчете на объемную жесткость ограничивают перемещения, вызванные действующими нагрузками. В частности, большие упругие деформации изгиба валов могут привести к заклиниванию тел качения в подшипниках и перекосу зубьев колес в зубчатом зацеплении. Расчет на контактную жесткость с начальным контактом в точке производят по формулам теории контактных напряжений и деформаций.

Износостойкость является важнейшим критерием работоспособности трущихся деталей машин. Отметим, что большинство деталей выходит из строя именно из-за износа. Изнашивание представляет собой постепенное изменение размеров и формы деталей по поверхностям скольжения в результате трения. Износ влечет за собой потерю точности, уменьшение КПД и снижение прочности вследствие уменьшения сечений, увеличения динамических нагрузок, возрастание шума, иногда полное истирание (тормозные колодки). Расчеты на износостойкость предусматривают обеспечение жидкостного трения или же назначение установленных практикой заниженных, по сравнению с прочностными расчетами, допустимых напряжений смятия и скоростей скольжения.

Виброустойчивость — способность конструкций работать в нужном диапазоне режимов без недопустимых колебаний. В связи с повышением скоростей машин явления колебаний становятся все более опасными, и поэтому расчеты на виброустойчивость приобретают все большую актуальность. В частности, при расчете быстроходных валов определяют их собственные частоты колебаний и оценивают возможность возникновения резонанса.

Теплостойкость. Нагрев деталей может вызвать понижение прочности материала, снижение вязкости смазочного слоя масляных пленок и, следовательно, увеличение износа деталей. Кроме того, при нагреве могут измениться зазоры в кинематических парах. Для уменьшения вредных последствий нагрева деталей выполняют тепловые расчеты и применяют искусственное охлаждение деталей.

4.2.2. Машиностроительные материалы и термическая обработка

Расчет и проектирование деталей машин начинается с выбора материала и назначения термической обработки. Для изготовления деталей в машиностроении широко используют стали и чугуны, а также медные, алюминиевые, магниевые, титановые и другие сплавы, композиты и пластические массы.

Стали — сплав железа с углеродом (до 2 %) и другими металлами, поддающийся ковке. По сравнению с другими материалами стали имеют высокую прочность, пластичность, хорошо обрабатываются механически, термически и химико-термически.

По химическому составу стали делятся на углеродистые и легированные.

Углеродистые стали наиболее распространены в промышленности, их доля составляет примерно 80 % от общего объема выплавки. Углеродистые стали подразделяются на три группы:

- обычного качества;
- качественные общего назначения (конструкционные);
- специальные (инструментальная, котельная, трансформаторная и др.).

Свойства углеродистой стали изменяются в зависимости от содержания в ней углерода. Чем его меньше, тем сталь пластичнее.

Наибольшее распространение в машиностроении получили углеродистые стали обычного качества ввиду их невысокой стоимости. Из них изготавливают гайки, болты, оси, валы, металлоконструкции. В зависимости от назначения и гарантированных механических свойств углеродистые стали обычного качества подразделяются на три группы А, Б и В.

А — без уточнения химического состава. Обозначаются от Ст 0 до Ст 6. Чем больше число в обозначении марки стали, тем больше содержание углерода.

Б — поставляется с гарантированным химическим составом. Пример обозначения: БСт 3.

В — поставляют с гарантированным химическим составом, а также механическими свойствами. Обозначаются ВСт 2, ВСт 5 и т. д.

Качественные (конструкционные) углеродистые стали выпускают с соблюдением более строгих технических условий по составу, примесям, ведению плавки и т. д. Обозначаются — от стали 08 до стали 85. Цифры обозначают среднее содержание углерода в сотых долях процента. Конструкционные стали условно подразделяют на низкоуглеродистые (с содержанием углерода до 0,25 %), среднеуглеродистые (0,3 %... 0,55 %) и высокоуглеродистые (0,6 %...0,85 %).

Благодаря их высокой пластичности низкоуглеродистые конструкционные стали применяют для изготовления деталей путем пластического деформирования и сварки.

Среднеуглеродистые стали более прочные и менее пластичные. Хорошо обрабатываются на металлорежущих станках и используются для изготовления широкого спектра деталей.

Высокоуглеродистые стали применяют для изготовления деталей, испытывающих большие напряжения, таких как пружины, ресоры и т. д.

Легированные стали выплавляют с добавлением легирующих элементов для улучшения их технических свойств (механических, коррозионных, тепловых и т. д.). Легированные стали обозначаются цифрами и буквами, например: 40Х, 18ХН10 Т, 12ХНЗА, 18ХТТ и др. Цифры вначале обозначают содержание углерода в сотых долях процента. Буквы обозначают легирующий элемент: В — вольфрам, Г — марганец, Н — никель, М — молибден, Т — титан, Х — хром, Ю — алюминий. Цифры после легирующего элемента обозначают содержание этого элемента в процентах. При содержании легирующей добавки менее 1,5 % цифра не ставится.

Основная часть легированных сталей выплавляется качественной с содержанием примесей фосфора и кремния до 0,035 %. Высококачественные легированные стали с пониженным содержанием вредных примесей до 0,025 % обозначаются в конце буквой А.

Легированные стали условно подразделяют на низколегированные (с общим содержанием легирующих элементов до 3 %), среднелегированные (от 3 % до 5,5 %) и высоколегированные (свыше 5,5 %).

Легированные и качественные углеродистые стали имеют высокую прочность (временное сопротивление от 800 до 1400 МПа) и являются основными материалами для изготовления различных ответственных деталей машин, таких как зубчатые колеса, валы и т. д.

Чугун — сплав железа с углеродом с содержанием углерода свыше 2 %, плохо поддающийся ковке. Чугун обладает высокими литейными свойствами и хорошо обрабатывается резанием.

В зависимости от структуры различают серый, белый и ковкий чугуны. Наиболее широко в промышленности используются серые чугуны. Пример обозначения: СЧ28. Цифра после аббревиатуры серого чугуна обозначает предел прочности при растяжении в МПа, деленный на 10.

Термическая обработка применяется для придания стали определенных свойств (высокой прочности, пластичности, вязкости и др.). Выполняют термообработку заготовок либо готовых деталей. Любой вид термической обработки состоит из трех стадий: нагрева до требуемой температуры с определенной скоростью, выдержки при этой температуре в течение требуемого времени и охлаждения с заданной скоростью. К основным видам термической обработки относятся отжиг, нормализация, закалка и отпуск.

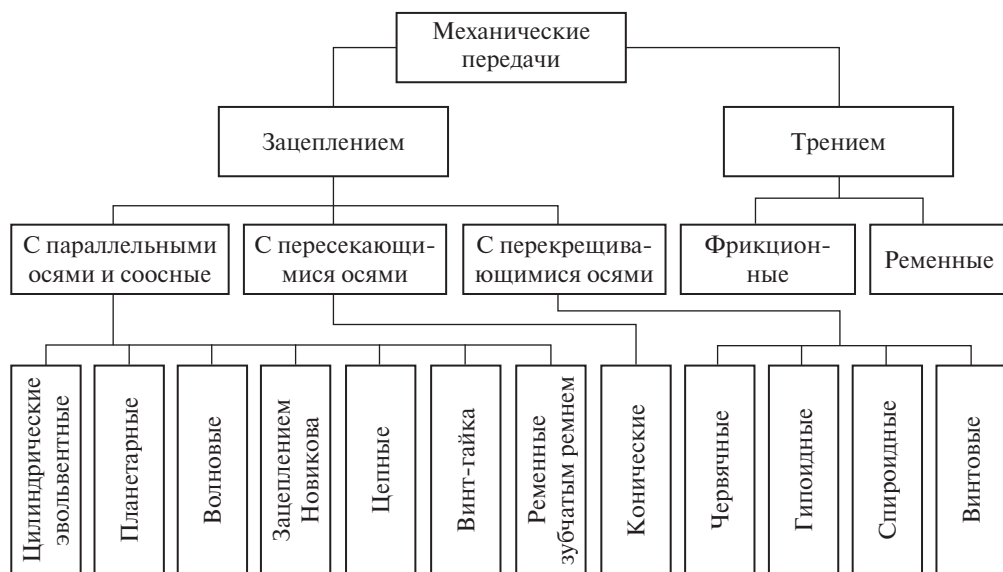
Отжиг характеризуется медленным охлаждением, часто вместе с нагревательной печью. Отжиг применяют для снижения твердости и лучшей обрабатываемости резанием отливок, проката и поковок из углеродистых и легированных сталей, а также для снятия остаточных напряжений после сварки.

Нормализация отличается от отжига охлаждением на воздухе. Применяется для получения однородной структуры с более высокой твердостью, чем после отжига.

Закалка характеризуется высокой скоростью охлаждения в воде, масле или солевых растворах. В результате закалки металл получает мелкозернистую однородную структуру с высокой твердостью, прочностью, коррозионной стойкостью, но пониженной пластичностью и более трудно обрабатывается резанием. Закалка подразделяется на объемную и поверхностную.

Отпуск состоит из нагрева до температуры ниже интервала фазовых превращений. Применяется после закалки для улучшения обрабатываемости резанием и уменьшения остаточных термических напряжений.

4.3. Механические передачи



Механической передачей или просто передачей называют механизм, служащий для передачи механической энергии на расстояние от двигателя к рабочему органу машины с преобразованием скоростей и крутящих моментов. Необходимость передач обуславливается различными скоростями движения вала двигателя и рабочего органа машины. Для большинства машин частота вращения n_1 вала двигателя больше частоты вращения n_2 рабочего органа.

Важнейшим параметром передачи является **передаточное отношение**.

Передаточное отношение — это отношение угловой скорости ω_1 ведущего вала к угловой скорости ω_2 ведомого:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.1)$$

Условимся в дальнейшем параметрам ведущего звена присваивать индекс 1, а параметрам ведомого элемента — индекс 2.

Независимо от вида передачи все они имеют ряд общих параметров, которые используются при проектировании и расчете.

Окружная скорость

$$V = \omega \frac{D}{2} = \frac{\pi D n}{60}, \quad (4.2)$$

где ω — угловая скорость, рад/с; D — диаметр звена передачи, м; n — частота вращения, об/мин; V — окружная скорость, м/с.

Окружная сила — сила, действующая на звено, вызывающая его вращение и направленная по касательной к траектории точки ее приложения:

$$F_t = \frac{2 \cdot T}{D}, \quad (4.3)$$

где F_t — окружная сила, Н; T — крутящий момент, Н·м, D [м].

Мощность P при поступательном движении выражается формулой:

$$P = F_t \cdot V, \quad (4.4)$$

в которой используются следующие единицы измерений: мощность — [Вт], окружная сила — [Н] и скорость — [м/с].

При вращательном движении мощность равна:

$$P = T \cdot \omega. \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) P — мощность, [Вт]; T — крутящий момент [Н·м] и ω — угловая скорость [рад/с].

Часто, зная передаваемую мощность и угловую скорость, приходится определять крутящий момент:

$$T = \frac{P}{\omega}. \quad (4.6)$$

Поскольку в технике обычно мощность выражают в киловаттах, а частота вращения n в об/мин, то для определения крутящего момента, выраженного в Н·м, используют зависимость:

$$T = 9550 \frac{P}{n}, \quad (4.7)$$

где P — в [кВт], а n — в [об/мин]. Формула (4.7) получена из выражения (4.6) с учетом того, что $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$ и $\omega = \pi n / 30$, T — [Нм].

Коэффициент полезного действия передачи представляет собой отношение полезной мощности на ведомом звене к затраченной мощности ведущего звена, т. е.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \quad (4.8)$$

Отметим, что коэффициент полезного действия всегда меньше единицы и общий КПД последовательно соединенных передач равен произведению КПД каждой передачи.

Предварительные сравнения различных типов передач по коэффициенту полезного действия можно приводить с помощью табл. 4.3.

Таблица 4.3

Ориентировочные значения основных параметров передач вращательного движения

Вид передачи		Передаточное отношение		КПД при номинальной нагрузке	Относительные размеры	Относительная стоимость
		Часто встречающиеся	Наибольшее			
Цилиндрическая зубчатая	Прямозубая	3–5	12	0,95–0,98	1	1
	Косозубая	3–6	15	0,95–0,98	0,9	0,95
Коническая зубчатая		2–4	10	0,9–0,97	1,2	1,3
Винтовая зубчатая		1–4	8	0,8–0,9	1,4	1,3
Червячная	Однозаходная	30–800	300	0,5–0,65	0,5	0,7–0,8
	Двухзаходная	15–40	60	0,7–0,8	0,5	0,7–0,8
	Четырехзаходная	10–20	40	0,8–0,98	0,5	0,7–0,8
Ременная	Плоскоремennая	2–4	7	0,92–0,96	5	0,9
	Клиноремennая	2–6	10	0,9–0,95	2–2,5	0,8
Цепная		2–4	10	0,9–0,94	1,5–2,5	0,9
Фрикционная		2–4	8	0,75–0,9	1,5–2	0,9

Примечание: Относительные размеры и стоимость передач сопоставимы при одинаковых передаточных отношениях и передаваемой мощности.

4.3.1. Зубчатые передачи

Зубчатые и червячные передачи широко распространены в различных областях машиностроения и являются основными видами передач, применяемых в современных машинах. Большое распространение зубчатых и червячных передач объясняется рядом существенных преимуществ их по сравнению с другими видами. Отметим основные преимущества: компактность, возможность осуществления постоянного передаточного отношения, высокий КПД, долговечность, надежность в работе, простота обслуживания, использование для изготовления экономичных материалов.

По условиям эксплуатации зубчатые и червячные передачи могут быть открытыми и закрытыми. Закрытые передачи размещают в металлическом корпусе, заполненном до определенного уровня маслом. Если закрытая зубчатая передача представляет собой самостоятельный монтажный узел, то она называется редукторной передачей или редуктором.

В зависимости от взаимного расположения осей вращения ведущего и ведомого валов различают следующие основные виды зубчатых и червячных передач:

- Передача вращения между валами с параллельными осями осуществляется цилиндрическими колесами с прямыми, косыми и шевронными зубьями (см. рис. 4.1). В прямозубых цилиндрических колесах (см. рис. 4.1, *а*) зубья располагаются параллельно осям вращения. В косозубых колесах (см. рис. 4.1, *б*) зубья расположены по винтовым линиям правого или левого направления. В шевронных зубчатых колесах (см. рис. 4.1, *в*) зубья располагаются также по винтовым линиям, но имеют на каждой половине колеса противоположное направление. Применением косозубых и шевронных колес достигается повышение плавности, бесшумности и увеличение нагрузочной способности зубчатых передач, что позволяет их использовать при более высоких скоростях вращения, чем прямозубые цилиндрические колеса.

- Передача вращения между валами с пересекающимися осями осуществляется коническими колесами с прямыми и непрямыми (косыми, круговыми, спиральными) зубьями (см. рис. 4.2). Применение непрямоугольных колес также увеличивает плавность и нагрузочную способность передач и допускает более высокие скорости вращения по сравнению с прямоугольными.

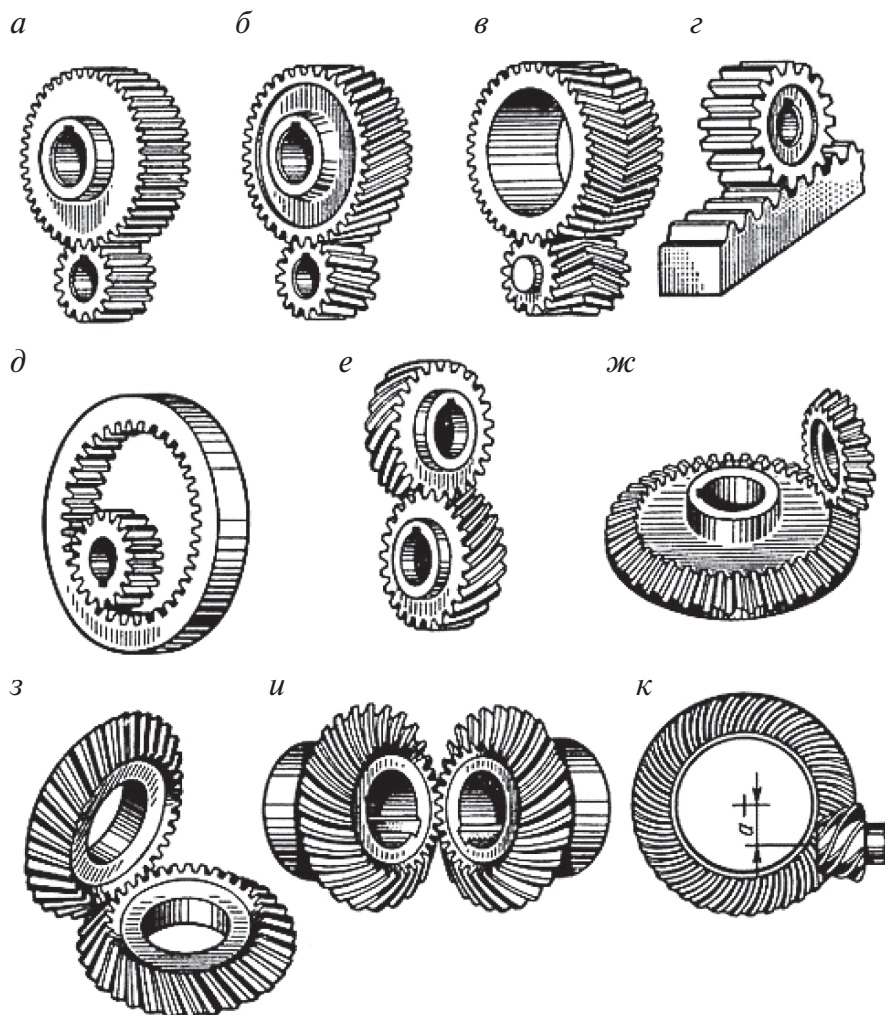


Рис. 4.1

• Передача вращения между валами со скрещивающимися осями осуществляется червячной, червячно-спироидной, гипоидной передачей. Наибольшее распространение среди перечисленных передач получила червячная передача с цилиндрическим архимедовым червяком (см. рис. 4.3). Ведущим звеном червячной передачи является червяк, имеющий цилиндрическую форму и представляющий собой однозаходный или многозаходный винт с трапецеидальной или близкой к ней нарезкой. Ведомое звено передачи — червячное колесо, имеющее вогнутую форму профиля и зубья, расположенные по винтовым линиям.

Червячная передача позволяет получить большие передаточные отношения (до 300). Недостаток — сравнительно низкий КПД (0,50...0,85).

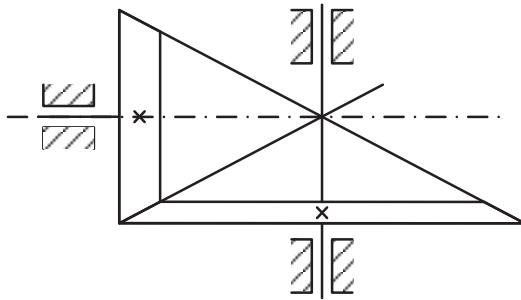


Рис. 4.2

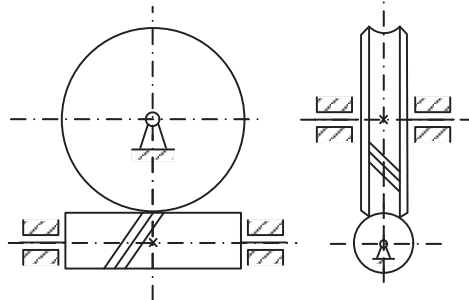


Рис. 4.3

4.3.2. Цилиндрические зубчатые передачи

Геометрия цилиндрических зубчатых колес и зацеплений

Основным условием, которому должны удовлетворять боковые профили зубьев зубчатых колес, является постоянство передаточного отношения передачи. Это условие обеспечивается, если выполняется требование **основной теоремы зацепления**: *общая нормаль, проведенная в точке контакта зубьев, должна проходить через полюс зацепления «Р» независимо от положения точки контакта*.

Для обеспечения высокого КПД и прочности колес профили должны иметь малые скорости скольжения при передаче движения и достаточные радиусы кривизны в точках контакта. Профили должны также допускать легкое изготовление простым инструментом независимо от числа зубьев. Из всего разнообразия профилей всем этим условиям наиболее полно отвечают боковые профили зубьев, очерченные по эвольвенте окружности.

Колеса с такими профилями образуют так называемое **эвольвентное зацепление**, нашедшее широчайшее применение в машиностроении. Каждое эвольвентное колесо может входить в зацепление с колесами того же модуля, имеющими любое число зубьев. Эвольвентное зацепление мало чувствительно к отклонениям межосевого расстояния.

Эвольвентой называется кривая, которая описывается точкой B , лежащей на касательной NN к окружности, если эту касательную обка-

тывать без скольжения по окружности в ту или иную сторону (рис. 4.4). Касательная NN называется производящей прямой, а *окружность диаметра d_b , по которой перекачивается эта прямая линия*, — **основной окружностью**. Из образования эвольвенты следует, что основная окружность является геометрическим местом центров кривизны эвольвенты, поэтому нормаль к эвольвенте касается основной окружности, а радиус кривизны эвольвенты ρ в любой ее точке равен длине отрезка AB производящей прямой NN . Следовательно, $\rho = AB =$ дуге AC . Угол COB называется эвольвентным углом профиля зуба $\text{inv}\alpha$ (инволюта угла α). Из рис. 4.4 имеем

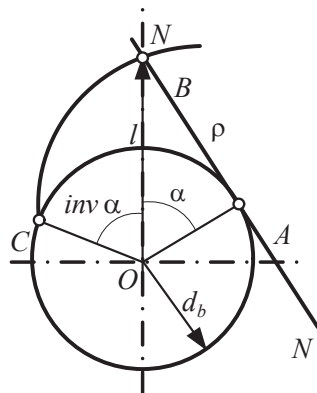


Рис. 4.4

$$\text{inv } \alpha = \frac{\overset{\frown}{AC}}{OC} - \alpha = \frac{AB}{OC} - \alpha = \text{tg } \alpha - \alpha; \quad \alpha = \arccos\left(\frac{d_b}{2 \cdot l}\right). \quad (4.9)$$

Зависимость (4.9) называется уравнением эвольвенты, так как угол $\text{inv}(\alpha)$ и радиус-вектор l полностью определяют координаты точки на эвольвенте, построенной на основной окружности диаметра d_b .

Образование простейшего зубчатого механизма представлено на рис. 4.5. Возьмем передачу, в которой окружности с диаметрами d_{w1} и d_{w2} перекачиваются друг по другу без скольжения. Эти окружности, касающиеся друг друга в полюсе зацепления P , принято называть **начальными окружностями**. Если на начальных окружностях расположить последовательно чередующиеся выступы-зубья и впадины, то передача будет осуществляться при помощи боковых профилей зубьев. Боковые профили зубьев часто выполнены в виде эвольвент, образованных на основных окружностях диаметрами d_{b1} и d_{b2} . Боковые профили зубьев представляют собой взаимнооггибаемые кривые, которые передают движение при наличии качения со скольжением. Точка P (мгновенный центр относительного вращения), принадлежащая неподвижной плоскости, называется **полюсом зацепления**. Полюс зацепления совпадает с точкой пересечения межосевой линии $O_1 O_2$ с общей нормалью NN к двум сопряженным профилям. Из условия образования эвольвенты следует, что AK — нормаль к эвольвенте первого колеса и одновременно радиус кривизны в этой точке, а BK — соответ-

ственно нормаль и радиус кривизны второй эвольвенты в точке касания боковых профилей зубьев K . Поскольку прямая AB является касательной одновременно к обеим основным окружностям, положение ее неизменно, поэтому пересечение линии AB с линией центров $O_1 O_2$ находится в полюсе зацепления P , что соответствует основной теореме зацепления. Расстояние между осями колес по межосевой линии называется **межосевым расстоянием** и обозначается a_w .

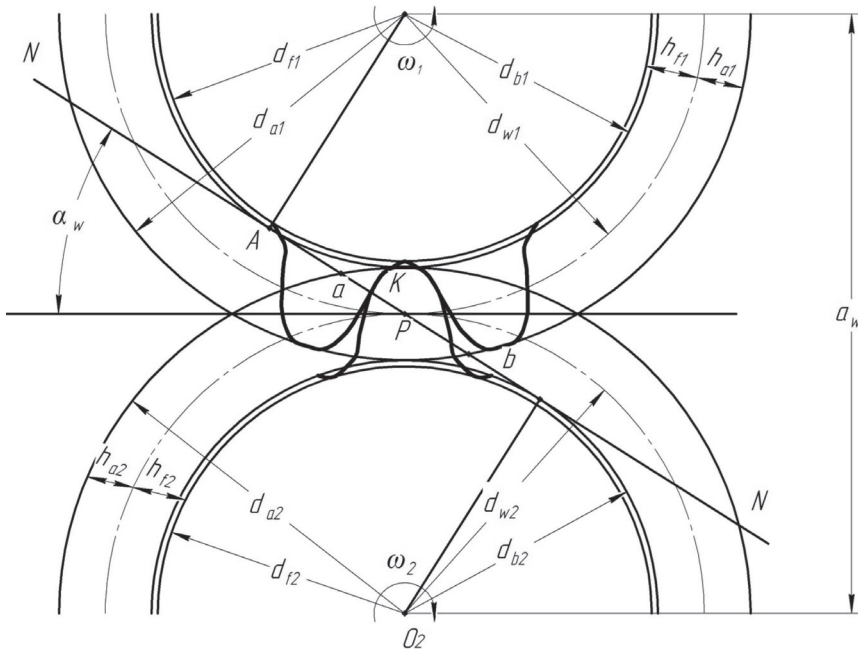


Рис. 4.5

Геометрическое место точек контакта зубьев на неподвижной плоскости называется линией зацепления. В эвольвентной передаче линия зацепления совпадает с производящей прямой AB . Отрезок ab называется активной линией зацепления. Точки a и b находятся на пересечении линии зацепления AB с окружностями вершин зубьев. Угол α_w между линией зацепления и прямой, перпендикулярной к межосевой линии, называется **углом зацепления**.

Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев, измеренное по дуге concentрической окружности зубчатого колеса, называется **окружным шагом** p . Шаг может быть измерен по любой окружности. Отношение шага к числу π называется **модулем зацепления**.

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (4.10)$$

Модуль является основным параметром зубчатого зацепления, через него выражаются все размеры зубчатых колес и передачи. Модули стандартизованы в диапазоне 0,05–100 мм по ГОСТ 9563–80.

Настройка инструмента при изготовлении колес производится по делительной окружности. *Окружность, расположенная в пределах высоты зуба зубчатого колеса, шаг по которой соответствует стандартному значению модуля, называется делительной окружностью.* Диаметр делительной окружности равен произведению модуля колеса на число зубьев z .

$$d = mz. \quad (4.11)$$

Окружность диаметра d_a , ограничивающая вершины зубьев, называется **окружностью вершин зубьев**; окружность диаметра d_f , ограничивающая впадины зубьев, — **окружностью впадин**. Зуб колеса условно делится на головку высотой h_a и ножку высотой h_f . В нормальных зубчатых колесах $h_a = m$ и $h_f = 1,25m$, следовательно, высота зуба $h = 2,5m$.

Диаметр окружности вершин зубьев

$$d_a = d + 2h_a = m(z + 2). \quad (4.12)$$

Диаметр окружности впадин зубьев

$$d_f = d - 2h_f = m(z - 2,5). \quad (4.13)$$

Радиальный зазор (расстояние между окружностью вершин зубьев одного колеса и окружностью впадин сопряженного колеса)

$$c = 0,25m. \quad (4.14)$$

Учитывая, что передаточное отношение от первого колеса ко второму

$$u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

получаем, что в зубчатой передаче:

$$u_{1-2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.15)$$

Отношение числа зубьев ведомого зубчатого колеса к числу зубьев ведущего колеса (шестерни) называется передаточным числом и согласно ГОСТ обозначается буквой « u ». В понижающих зубчатых передачах передаточные отношения и передаточные числа совпадают.

Центральный угол концентрической окружности, равный $2\pi/z$ или $360^\circ/z$, называется шаговым углом зубьев — τ . Угол поворота зубчатого колеса передачи от положения входа зуба в зацепление до положения выхода из зацепления называется углом перекрытия φ_α , а отношение угла перекрытия к угловому шагу — **коэффициентом перекрытия ε_α** :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau}. \quad (4.16)$$

При $\varepsilon_\alpha = 1$ в зацеплении постоянно находится одна пара зубьев. При $\varepsilon_\alpha = 2$ в зацеплении постоянно находится две пары зубьев. Коэффициент перекрытия не может быть меньше единицы.

Передаточное отношение механизма, состоящего из нескольких последовательно соединенных зацеплений

Механизмы, состоящие из одной пары зубчатых колес, обеспечивают относительно небольшое передаточное отношение. Для получения больших передаточных отношений используют зубчатые передачи, построенные из нескольких последовательно соединенных зацеплений (многоступенчатые редукторы, коробки скоростей и т. д.). Рассмотрим такой механизм, состоящий из трех пар зубчатых колес, каждая из которых называется ступенью (см. рис. 4.6).

При определении передаточного числа каждой ступени необходимо учитывать его знак. Для внешнего зацепления это минус, так как колеса вращаются в противоположные стороны; для внутреннего зацепления, в котором шестерня и колесо вращаются в одну сторону, знак будет плюс.

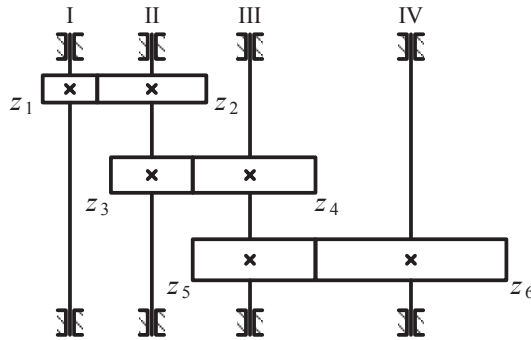


Рис. 4.6

Запишем передаточные числа отдельных пар зубчатых колес, составляющих трехступенчатый механизм:

$$u_{1-2} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad u_{3-4} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad \dots \quad u_{5-6} = \frac{\omega_{III}}{\omega_{IV}} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Перемножим эти передаточные числа:

$$u_{1-2} \cdot u_{3-4} \cdot u_{5-6} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} \cdot \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} \cdot \frac{\omega_{III}}{\omega_{IV}} = \frac{\omega_I}{\omega_{IV}}.$$

Поскольку $\frac{\omega_I}{\omega_{IV}} = \frac{\omega_I}{\omega_6} = u_{1-6}$, то можно записать

$$u_{1-6} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5} \right). \quad (4.17)$$

Следовательно, **передаточное отношение зубчатого механизма, состоящего из нескольких пар зубчатых колес, соединенных последовательно, равно произведению передаточных чисел отдельных пар, составляющих механизм.**

Запишем передаточное отношение для механизма, состоящего из нескольких последовательно соединенных зубчатых колес, образующих ряд (см. рис. 4.7).

$$u_{1-4} = \frac{\omega_I}{\omega_{IV}} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{z_4}{z_1}. \quad (4.18)$$

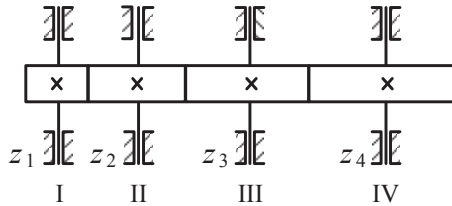


Рис. 4.7

Промежуточные колеса не влияют на величину передаточного отношения механизма, а только определяют его знак. Такие колеса называются паразитными и чаще всего применяются в коробках скоростей для изменения направления вращения исполнительного органа машины, например, для включения заднего хода автомобиля.

Виды разрушения зубьев, критерии работоспособности и расчета зубчатых передач

В случае, когда напряжения, возникающие в зубьях, превышают допустимые величины, может произойти их разрушение. При этом либо разрушается боковая поверхность зубьев (нарушается контактная прочность), либо зубья выламываются у основания (нарушается изгибная прочность зубьев). Причинами разрушения зубьев могут быть следующие факторы:

- Внезапное приложение пиковой нагрузки, превышающей допустимую величину.
- Многократное приложение нагрузки, достаточно большой для того, чтобы вызвать появление и распространение усталостной трещины.
- Местная концентрация нагрузки, являющаяся результатом неточного изготовления зубьев, погрешностей монтажа, значительных деформаций колес, опор и валов.

Разрушение рабочих поверхностей (нарушение контактной прочности) может произойти по следующим причинам.

Абразивный износ возникает, главным образом, в открытых передачах. Он заключается в истирании зубьев в результате попадания на рабочие поверхности пыли, грязи, песчинок, металлических частиц и т. д., играющих роль абразивного материала.

Заедание происходит вследствие разрыва масляной пленки или отсутствия смазки при больших удельных давлениях на поверхности зубьев. При этом происходит сначала схватывание, затем отрыв частиц материала от зуба одного колеса и приваривание их к зубу другого. В дальнейшем эти частицы скользят по контактными поверхностям зубьев и оставляют на них глубокие царапины.

Усталостное выкрашивание (питтинг) может возникнуть в закрытых передачах, работающих в масляной ванне. При этом в поверхностном слое возникают микроскопические трещины. Вначале эти трещины появляются в зоне, примыкающей к полюсу зацепления. Под действием давления масла, которое с большой силой вдавливаются в трещины сопряженным зубом, происходит развитие трещины с последующим выкрашиванием частиц материала. На рабочей поверхности образуются раковины, которые с течением времени покрывают значительную часть зуба. В открытых передачах в связи с отсутствием жидкой смазки такой вид разрушения не наблюдается. Исследования показывают, что питтинг возникает при наличии жидкой смазки в том случае, когда контактные напряжения сдвига выходят за пределы допускаемых величин.

Нарушение изгибной прочности (поломка) зуба происходит вследствие усталости металла при его многоцикловом нагружении.

Итак, разрушение зубьев происходит по следующим причинам:

- усталостный износ боковых — рабочих поверхностей зубьев вследствие возникновения повторных контактных напряжений;
- усталостная поломка зубьев у их основания вследствие повторных воздействий нормальных напряжений изгиба; либо от воздействия пиковых напряжений;
- поломка зуба у основания либо заедание рабочих поверхностей зубьев вследствие возникновения мгновенных пиковых нагрузок, возникающих, например, при пуске и торможении машины.

Исходя из этих физических явлений, зубчатые передачи закрытого и открытого типов принято рассчитывать по следующим критериям:

- закрытые (редукторные) передачи: на выносливость зубьев по контактным напряжениям; на прочность зубьев по напряжениям изгиба;
- открытые передачи — только на изгибную прочность.

Из всех параметров зубчатых передач основными, определяющими размеры зубчатых колес и зубьев, являются межосевое расстояние a_w и модуль m . На величину контактных напряжений оказывает влияние межосевое расстояние a_w , а на величину напряжений изгиба — модуль m , поэтому формулы для расчета зубьев на прочность по контактным напряжениям выражают через межосевое расстояние a_w , а формулы для расчета зубьев на прочность по напряжениям изгиба выражают через модуль m .

Расчет цилиндрических прямозубых колес на прочность по контактным напряжениям

Целью этого расчета является предотвращение разрушения рабочих поверхностей зубьев вследствие возникновения повторных контактных напряжений сдвига.

В основу расчета зубьев на прочность по контактным напряжениям положена теория статически сжатых цилиндров, разработанная Герцем и развитая Беляевым. Сущность теории Герца-Беляева состоит в следующем. Под действием силы нормального давления $F_{\text{нп}}$ на контактных поверхностях двух цилиндров возникают контактные напряжения σ_H (см. рис. 4.8).

Величину этих контактных напряжений определяют по формуле

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q_{\text{нп}} E_{\text{пр}}}{\rho_{\text{пр}} \cdot 2\pi(1-\mu^2)}}, \quad (4.19)$$

где $q_{\text{нп}}$ — равномерно распределенная нагрузка, действующая на зубья; $E_{\text{пр}}$ — приведенный модуль упругости; $\rho_{\text{пр}}$ — приведенный радиус кривизны; μ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Применим теорию Герца-Беляева для получения основных зависимостей при расчете зубьев прямозубых цилиндрических колес на прочность по контактным напряжениям. Наибольшие контактные напряжения возникают в тот момент, когда точка контакта находится в полюсе зацепления.

Условие прочности зубьев по контактным напряжениям можно в общем виде записать неравенством $\sigma_H \leq \sigma_{HP}$, где σ_H — расчетное контактное напряжение; σ_{HP} — допускаемое контактное напряжение.

Изобразим зубья шестерни и колеса в тот момент, когда они касаются в полюсе зацепления. Заменим зубья шестерни и колеса цилиндрами с радиусами, равными радиусам кривизны эвольвентных профилей зубьев в точке их касания (рис. 4.9).

Согласно свойствам эвольвенты центры заменяющих цилиндров находятся на общей нормали к сопряженным профилям NN в точках A и B , крайних точках линии зацепления AB .

Радиус кривизны эвольвентного профиля зуба первого колеса:

$$\rho_1 = AP = O_1 P \sin \alpha_w. \quad (4.20)$$

Радиус кривизны бокового профиля зуба второго колеса:

$$\rho_2 = PB = \frac{d_1 u}{2} \sin \alpha_w. \quad (4.21)$$

В формулах (4.20) и (4.21) d_1 и d_2 — делительные диаметры зубчатых колес; u — передаточное число зубчатой передачи.

Приведенный радиус кривизны:

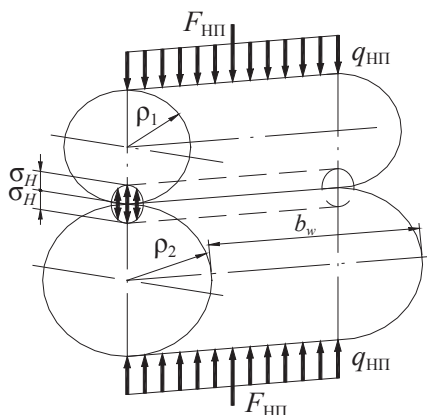


Рис. 4.8

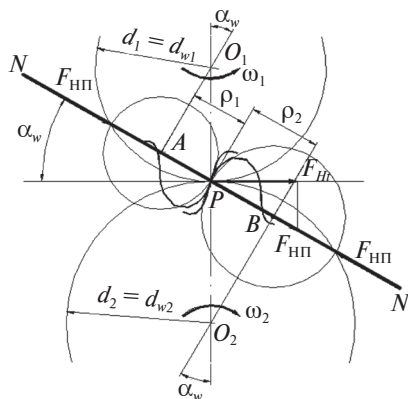


Рис. 4.9

$$\rho_{\text{пр}} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2} = \frac{\frac{d_1}{2} \sin \alpha_w \cdot \frac{d_1}{2} u \sin \alpha_w}{\frac{d_1}{2} \sin \alpha_w \pm \frac{d_1}{2} u \sin \alpha_w} = \frac{d_1 u \sin \alpha_w}{2(u \pm 1)}.$$

Приведенный модуль упругости с учетом того, что сопряженные колеса изготовлены из стали, т. е. $E_1 = E_2$,

$$E_{\text{пр}} = \frac{2E_2 E_1}{E_2 + E_1} = \frac{2E^2}{2E} = E.$$

Выразим равномерно распределенную нагрузку $q_{\text{НП}}$, действующую на зубья через крутящий момент на ведущем звене (шестерне):

$$q_{\text{НП}} = \frac{F_{\text{пр}}}{b_w} = \frac{F_{\text{НП}}}{b_w \cos \alpha_w} = \frac{2T}{d_{w1} b_w \cos \alpha_w},$$

где $F_{\text{НП}}$ — окружное усилие; T — крутящий момент на шестерне; b_w — ширина зубчатого венца (длина зуба).

Подставим значения $q_{\text{НП}}$, $E_{\text{пр}}$ и $\rho_{\text{пр}}$ в формулу Герца-Беляева (4.19):

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{2 \cdot T_1 \cdot E \cdot (u \pm 1)}{d_{w1} \cdot b_w \cos \alpha_w d_{w1} u \cdot \sin \alpha_w \cdot \pi \cdot (1 - \mu^2)}}. \quad (4.22)$$

Введем следующие обозначения:

$Z_{\text{м}}$ — коэффициент, учитывающий механические свойства материалов шестерни и колеса:

$$Z_{\text{м}} = \sqrt{\frac{E}{\pi \cdot (1 - \mu^2)}}.$$

Учитывая значения для стальных колес модуля упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$, получаем $Z_{\text{м}} = 275 \text{ МПа}^{1/2}$;

Z_H — коэффициент, учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев:

$$Z_H = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha_w}}.$$

Поскольку для некорригированных колес, а также колес с высотной коррекцией, в основном используемых в зубчатых передачах, угол зацепления $\alpha_w = 20^\circ$, коэффициент $Z_H = 1,77$.

В связи с тем, что в процессе работы передачи в зацеплении может находиться не одна пара зубьев, происходит изменение длины контактных линий, учитываемое коэффициентом Z_ε :

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}},$$

где ε_α — коэффициент перекрытия.

С учетом введенных коэффициентов формула (4.22) примет вид:

$$\sigma_H = Z_M Z_H Z_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \cdot T_1 \cdot (u \pm 1)}{d_w^2 \cdot u \cdot b_w}}. \quad (4.23)$$

Выразим диаметр начальной окружности шестерни d_{w1} через межосевое расстояние a_w :

$$d_{w1} = \frac{2a_w}{u \pm 1}. \quad (4.24)$$

Введем в формулу (4.23) коэффициент нагрузки K_H , учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев.

$$K_H = K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu},$$

где $K_{H\alpha}$ — коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями. Для прямозубой передачи $K_{H\alpha} = 1,0$; $K_{H\beta}$ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине

зубчатого колеса. Коэффициент $K_{H\beta}$ зависит от поверхностной твердости зубьев, ширины зубчатого венца и схемы передачи; K_{Hv} — коэффициент динамической нагрузки, зависит от степени точности зубчатых колес, которая назначается в зависимости от окружной скорости.

После подстановки в формулу (4.23) зависимости (4.24), коэффициента K_H и приближенных значений коэффициентов $Z_i = 275$, $Z_H = 1,77$, $Z_\varepsilon = 1$ и преобразований получим следующие выражения расчетов прямозубых зубчатых передач, изготовленных из сталей:

$$\sigma_H = \frac{9800}{a_w} \sqrt{\frac{K_H \cdot T_1 \cdot (u \pm 1)^3}{u \cdot b_{w2}}} \leq \sigma_{HP}; \quad (4.25)$$

$$a_w = 450 \cdot (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{T_1 \cdot K_H}{\psi_{ba} \cdot u \cdot \sigma_{HP}^2}}. \quad (4.26)$$

Формула (4.25) применяется для проверочных расчетов. Формула (4.26) — для проектных расчетов. В выражениях (4.25), (4.26) приняты следующие обозначения и размерности величин: T_1 — крутящий момент на шестерне, Н·м; a_w — межосевое расстояние, мм; σ_{HP} , σ_H — контактные напряжения, МПа; b_{w2} — ширина колеса, мм; $\psi_{ba} = b_w/a_w$ — коэффициент ширины колеса, безразмерная величина. Во всех формулах в сочетании $u \pm 1$ знак «+» соответствует внешнему зацеплению колес, а знак «−» — внутреннему.

Расчет зубьев на изгибную прочность

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в одном из соприкасающихся зубьев возникают в начальный момент их зацепления. Зуб рассматривается как консольная балка, нагруженная удельной силой нормального давления (распределенной нагрузкой) q_{Fn} с опасным сечением размерами $a \times b_w$ у основания (см. рис. 4.10). Зуб представляет собой короткую и широкую консоль, размеры опасного сечения которой соизмеримы с ее длиной. В таких случаях при изгибе возникает поворот и деформация сечений, т. е. гипотеза плоских сечений не соблюдается. Определение напряжений в таких случаях связано с решением сложной пространственной задачи теории упругости.

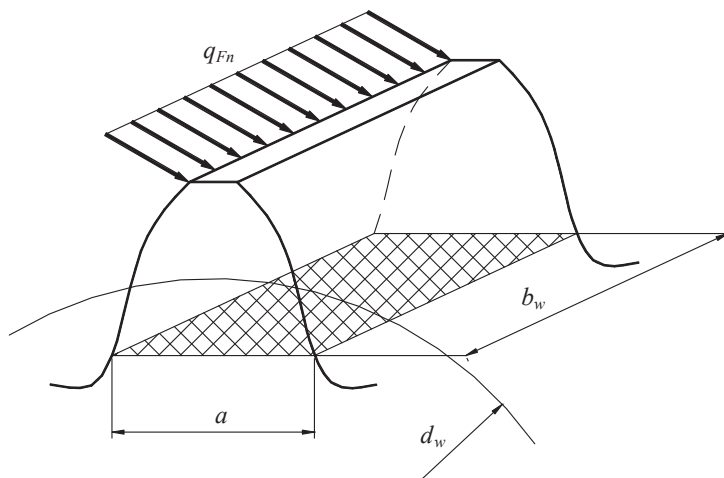


Рис. 4.10

Для получения достаточно простых зависимостей, используемых в инженерных расчетах, нормальные напряжения будем определять в соответствии с классической теорией изгиба. При этом погрешности, которые вносит теория в решение задачи, компенсируются введением в расчет ряда опытных коэффициентов. Все величины, входящие в расчетные формулы, выразим через параметры ведущего колеса — шестерни.

Рассмотрим зуб, нагруженный силой нормального давления F_n (рис. 4.11). Перенесем силу F_n по линии ее действия в точку A и разложим на две составляющие — окружное усилие F_t и радиальное усилие F_r . Для определения опасного сечения в зуб впишем профиль балки равного сопротивления, который очерчивается квадратичной параболой с вершиной в точке A . В точках B и C , где ветви параболы касаются эвольвент бокового профиля зуба, нормальные напряжения изгиба имеют наибольшие значения.

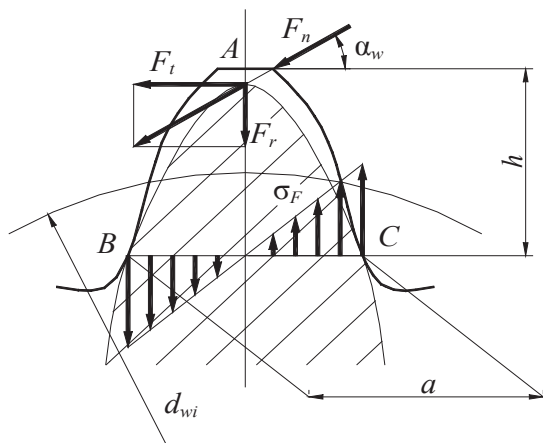


Рис. 4.11

Напряжения от составляющей $F_r = F_n \sin \alpha_w$ составляют 4–6 % от напряжения изгиба, поэтому ими можно пренебречь.

В соответствии с классической теорией плоского изгиба нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_F = \frac{M_E}{W_E}, \quad (4.27)$$

где M_E — изгибающий момент:

$$M_{\text{и}} = F_t h. \quad (4.28)$$

Здесь примем:

$$F_t = 2 T/d_{w1}, \quad (4.29)$$

W_E — момент сопротивления изгибу опасного сечения:

$$W_E = \frac{b_w a^2}{6}. \quad (4.30)$$

С учетом формул (4.28) и (4.29) запишем формулу для определения напряжений изгиба в виде:

$$\sigma_F = \frac{2 \cdot T_1 \cdot h \cdot 6}{d_{w1} \cdot b_{w1} \cdot a^2}. \quad (4.31)$$

Обозначим $\alpha = \alpha_1 p_t$, $h = \alpha_2 p_t$, где p_t — окружной шаг, α_1 и α_2 — численные коэффициенты. Введем в формулу коэффициент концентрации напряжений у основания зуба K_T . Линейные величины имеют размерность миллиметры, крутящий момент T_1 — ньютонметры, поэтому T_1 умножим на 10^3 . С учетом того, что $p_t = \pi \cdot m$, преобразуем формулу (4.31):

$$\sigma_F = \frac{2000 \cdot T_1 \cdot \alpha_2 \cdot p_t \cdot 6 \cdot K_T}{d_{w1} \cdot b_{w2} \cdot \alpha_1^2 \cdot p_t^2}. \quad (4.32)$$

Обозначим через Y_{F1} коэффициент формы зуба шестерни:

$$Y_{F1} = \frac{6 \cdot \alpha_2 \cdot K_T}{\pi \cdot \alpha_1^2}. \quad (4.33)$$

Введем в формулу коэффициент нагрузки K_F , аналогичный коэффициенту K_H , который учитывает влияние точности изготовления передачи:

$$K_F = K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}, \quad (4.34)$$

где $K_{F\alpha}$ — коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями; $K_{F\beta}$ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине зубчатого венца; K_{FV} — коэффициент, учитывающий динамическую нагрузку в зацеплении.

С учетом принятых обозначений из выражения (4.32) получаем формулу для проверочного расчета зубьев шестерни цилиндрической передачи на прочность по напряжениям изгиба:

$$\sigma_{F1} = Y_{F1} \cdot Y_{\beta} \frac{2000 \cdot T_1 \cdot K_F}{d_{w1} \cdot b_{w2} \cdot m} \leq \sigma_{FP1}. \quad (4.35)$$

В формуле (4.35) σ_{FP1} — допускаемое напряжение изгиба зуба шестерни; σ_{F1} — расчетное напряжение зуба шестерни; Y_{β} — коэффициент, учитывающий наклон зубьев.

Для прямозубой передачи $Y_{\beta} = 1$, для косозубой Y_{β} рассчитывается по зависимости:

$$Y_{\beta} = 1 - \frac{\beta}{140^0}. \quad (4.36)$$

Формула проверочного расчета зубчатого колеса на изгибную прочность запишется в виде:

$$\sigma_{F2} = \sigma_{F1} \cdot \frac{Y_{F2}}{Y_{F1}} \cdot \frac{b_{w1}}{b_{w2}} < \sigma_{FP2}. \quad (4.37)$$

Учитывая, что $d_{w1} = \frac{2 \cdot a_w}{u + 1}$, из выражения (4.35) получим формулу для предварительного расчета модуля из условия изгибной прочности:

$$m = K_m \frac{T_1 \cdot (u+1) \cdot Y_{F1}}{a_w \cdot b_{w1} \cdot \sigma_{FP1}}, \quad (4.38)$$

где $K_m = 1400$ для прямозубой передачи.

В предварительном расчете коэффициент формы зуба принимается $Y_{F1} = 4$ для прямозубых колес.

Расчет зубьев на прочность при воздействии максимальной (пиковой) нагрузки

Пиковыми называют нагрузки, превышающие расчетные, но действующие кратковременно (не более 3 с) и повторяющиеся в течение всего срока эксплуатации передачи не более 50000 раз. При расчете на контактную и изгибную прочность они не учитывались, поскольку не оказывают заметного влияния на усталостные явления в материале зубьев. Однако, под воздействием значительных пиковых нагрузок возможны излом зуба в опасном сечении или разрушение рабочих поверхностей в результате пластической деформации. Для того чтобы этого не произошло в случае возможного возникновения пиковых нагрузок, что специально отмечается в задании на проектирование, зубья колес проверяют на контактную и изгибную прочность при действии максимальной нагрузки по формулам:

$$\sigma_{H \max} = \sigma_H \sqrt{\frac{T_{1 \max}}{T_1}} \leq \sigma_{HP \max}; \quad (4.39)$$

$$\sigma_{F \max} = \sigma_F \sqrt{\frac{T_{1 \max}}{T_1}} \leq \sigma_{FP \max}, \quad (4.40)$$

где $\sigma_{H \max}$ и $\sigma_{F \max}$ — максимальные контактные и изгибные напряжения, соответствующие пиковой нагрузке; T_1 — расчетная нагрузка на шестерне; $T_{1 \max}$ — пиковая нагрузка на шестерне; $\sigma_{HP \max}$ и $\sigma_{FP \max}$ — допускаемые контактные и изгибные напряжения.

Допускаемое контактное напряжение при нормализации, улучшении, объемной закалке с низким отпускком равно $\sigma_{HP \max} = 2,8\sigma_T$; при

закалке ТВЧ $\sigma_{HPmax} = 40$ (HRC) МПа. Допускаемое изгибное напряжение соответственно равно: при объемной закалке и закалке ТВЧ $\sigma_{FPmax} = 2500$ МПа; при нормализации и улучшении $\sigma_{FPmax} = 2800$ МПа.

В расчете зубьев на прочность по максимальной нагрузке ограничиваются проверкой зубьев шестерни.

Особенности геометрии косозубых и шевронных зубчатых колес

Прямозубые колеса обладают существенным недостатком, который заключается в том, что их работа при больших скоростях сопровождается ударами. Причинами их возникновения являются погрешности при изготовлении зубьев и деформации. Удары вредно отражаются не только на прочности колес, но и других узлов машин и вызывают специфический шум.

При больших скоростях наиболее эффективным средством, обеспечивающим плавность и бесшумность работы, является применение колес с косыми и шевронными зубьями.

У косозубых колес зубья располагаются не по образующей делительного цилиндра, а составляют с ней некоторый угол β . В отличие от прямозубых колес, в которых зубья входят в зацепление одновременно по всей длине, в косозубых зубья входят в зацепление постепенно, благодаря чему они работают более плавно и бесшумно.

Для нарезания косозубых колес (рис. 4.12) используется инструмент такого же исходного профиля, как и для нарезания прямых, поэтому профиль косого зуба в его нормальном сечении совпадает с профилем прямого зуба.

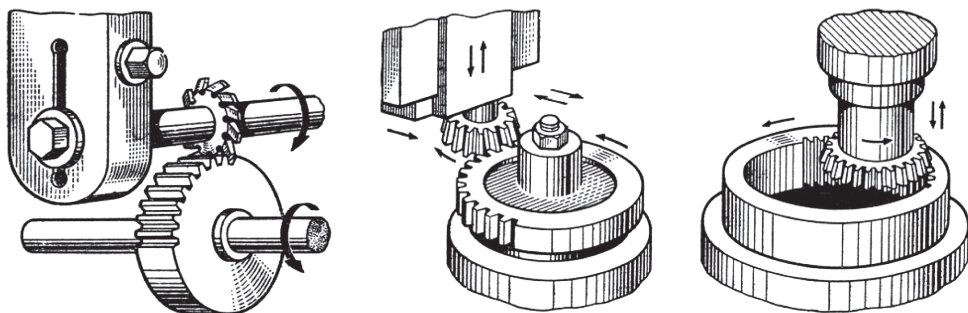


Рис. 4.12

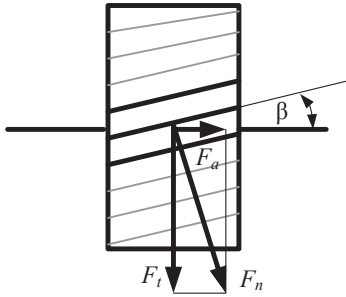


Рис. 4.13

Однако косозубые колеса имеют и существенный недостаток. В результате винтового расположения зубьев возникает осевая составляющая нормальной силы, которая обозначается F_α и называется осевой силой (рис. 4.13):

$$F_\alpha = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол наклона зуба к оси вращения на образующей делительного цилиндра. Величина этой осевой составляющей, так же как плавность и нагрузочная способность, зависит от угла наклона зуба β . С увеличением угла β повышается плавность и бесшумность работы передачи, увеличивается нагрузочная способность, но увеличивается и осевая сила F_α . При больших значениях F_α в конструкциях передач приходится предусматривать специальные опоры, которые воспринимают эти силы, конструкция при этом усложняется.

В связи с этим угол наклона β в косозубых передачах принято выполнять в пределах от 8 до 16°. При таких значениях обеспечиваются, с одной стороны, достаточно высокая плавность и нагрузочная способность передачи, с другой стороны, небольшое значение величины осевой составляющей F_α не требует установки опор сложной конструкции.

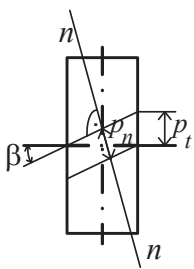


Рис. 4.14

В косозубых колесах различают окружной шаг p_t , измеренный в торцевом сечении колеса, и нормальный шаг p_n , измеренный в плоскости, нормальной к рабочей поверхности зуба $n-n$ (рис. 4.14).

В соответствии с этим в косозубых колесах имеются два модуля: модуль окружной $m_t = p_t/\pi$ и модуль нормальный $m_n = p_n/\pi$. Нормальный модуль является расчетным и стандартным. Модуль окружной имеет дробное значение $m_t = m_n \cos \beta$.

Диаметр делительной окружности косозубого колеса:

$$d = m_t \cdot z = \frac{m_n \cdot z}{\cos \beta}. \quad (4.41)$$

Межосевое расстояние цилиндрической косозубой передачи, образованной колесами без коррекции:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_n \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta}. \quad (4.42)$$

Расчеты на прочность цилиндрических косозубых и шевронных передач

Прочность зуба определяют его размеры и форма в нормальном сечении. Форму косоугольного зуба в этом сечении принято определять через параметры эквивалентного прямозубого колеса. Профиль зуба эквивалентного колеса соответствует профилю зуба косозубого колеса в его нормальном сечении.

Рассечем косозубое колесо нормальной к рабочей поверхности зуба плоскостью $n-n$ (см. рис. 4.15). В сечении получим эллипс с полуосями a и c . Проведем окружность радиусом ρ , равным радиусу кривизны эллипса в точке k . Эту окружность примем за делительную эквивалентного прямозубого колеса, к расчету которого сводится расчет рассматриваемого косозубого. Все величины, относящиеся к эквивалентному колесу, условимся обозначать с индексом « v ». Установим связь между величинами, относящимися к прямозубому и косозубому колесам.

Радиус кривизны эллипса в точке k :

$$\rho = \frac{a^2}{c} = \frac{d_v}{2}.$$

Полуоси эллипса:

$$a = \frac{d}{2 \cos \beta}; \quad c = \frac{d}{2},$$

откуда

$$d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}, \quad a_{wv} = \frac{a_w}{\cos^2 \beta}.$$

Ширина b_{wv} и диаметр d_v делительной окружности зубчатого венца эквивалентного колеса соответственно равны $b_{wv} = \frac{b_w}{\cos^2 \beta}$.

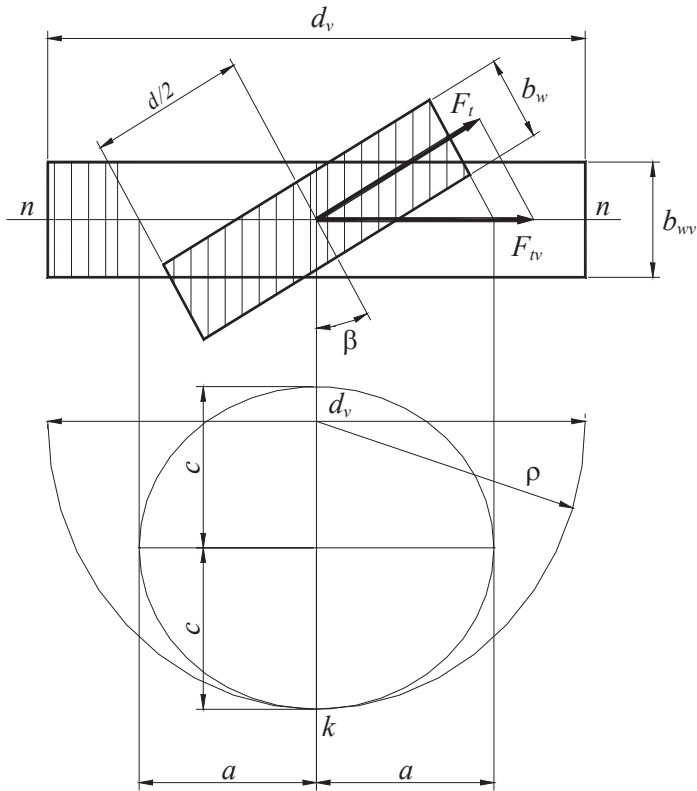


Рис. 4.15

Поскольку $d = \frac{m_n z}{\cos \beta}$, то $d_v = \frac{m_n z}{\cos \beta \cdot \cos^2 \beta}$, откуда приведенное число зубьев эквивалентного колеса равно

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}.$$

Крутящий момент на эквивалентном колесе равен:

$$T_v = \frac{F_{rv} \cdot d_v}{2} = \frac{F_t \cdot d}{2 \cos \beta \cdot \cos^2 \beta}.$$

С учетом того, что $F_t \cdot \frac{d}{2} = T$, где T — расчетный крутящий момент на косозубом колесе, получим

$$T_v = \frac{T}{\cos^3 \beta}.$$

Подставим значения d_{wv} , a_{wv} , b_{wv} , T_v в ранее полученные формулы для проектного и проверочного расчетов прямозубых цилиндрических колес. При этом примем среднее значение коэффициента перекрытия $\varepsilon_\alpha = 1,7$; угол наклона зуба $\beta = 12^\circ$ и коэффициент формы зуба будем определять с учетом приведенного числа зубьев z_v . После преобразования получим формулы, которые используют при расчете стальных косозубых колес с углом $\beta = 8 \dots 16^\circ$

$$a_w = 410 \cdot (u \pm 1)^3 \sqrt{\frac{T_1 \cdot k_H}{\Psi_{ba} \cdot u \cdot \sigma_{HP1}^2}}; \quad (4.43)$$

$$\sigma_H = \frac{8400}{a_w} \sqrt{\frac{T_1 \cdot k_H \cdot (u \pm 1)^3}{b_{w2} \cdot u}} \leq \sigma_{HP1}; \quad (4.44)$$

$$\sigma_{F1} = Y_{F1} \cdot Y_\beta \cdot Y_\varepsilon \frac{2000 \cdot T_1 \cdot k_F}{d_{w1} \cdot b_{w1} \cdot m_n} \leq \sigma_{FP1}; \quad (4.45)$$

$$\sigma_{F2} = \sigma_{F1} \frac{Y_{F2} \cdot b_{w1}}{Y_{F1} \cdot b_{w2}} \leq \sigma_{FP2}; \quad (4.46)$$

$$m_n = 4400 \frac{T_1 (u \pm 1)}{a_w b_{w1} \sigma_{FP1}}. \quad (4.47)$$

Здесь Y_β коэффициент, учитывающий наклон зубьев, Y_ε — коэффициент, учитывающий перекрытие зубьев:

$$Y_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_\alpha}.$$

Здесь ε_α — коэффициент перекрытия передачи.

Усилия в зубчатых цилиндрических передачах

При передаче крутящих моментов в прямозубой передаче между зубьями шестерни и колеса возникают силы взаимодействия. При этом полное давление на зуб F_n принято раскладывать на две взаимно перпендикулярные составляющие: окружное усилие F_t , направленное по касательной к основной окружности, и радиальное усилие F_r , которое направлено перпендикулярно к оси вращения (см. рис. 4.16):

$$F_{t1} = F_{t2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}; \quad (4.48)$$

$$F_{r1} = F_{r2} = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w; \quad (4.49)$$

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_w}. \quad (4.50)$$

Для определения направления усилий следует учитывать следующее правило: окружное усилие и полное (нормальное) давление на зуб ведомого колеса всегда совпадают с направлением окружной скорости; окружное усилие и полное давление на зуб ведущего колеса (шестерни) всегда направлено в сторону, противоположную окружной скорости шестерни; радиальные усилия направлены к центрам вращения колес.

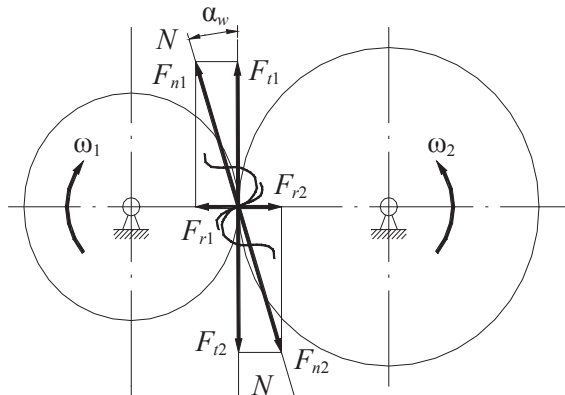


Рис. 4.16

В косозубых колесах полное усилие F_n на зуб принято раскладывать на три взаимно перпендикулярные составляющие. Первая составляю-

щая — окружное усилие F_t , — направлена по касательной к начальной окружности; вторая — радиальное усилие F_r — направлена к центру вращения колеса и третья составляющая — осевое усилие F_a — направлена параллельно оси вращения (рис. 4.17). Направления окружного и радиального усилий определяются как в прямозубых колесах. Направление осевого усилия зависит от направления вращения колеса и направления винтовой линии зуба (левое или правое). Окружное усилие, как и в любом виде передач, определяем по формуле:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}.$$

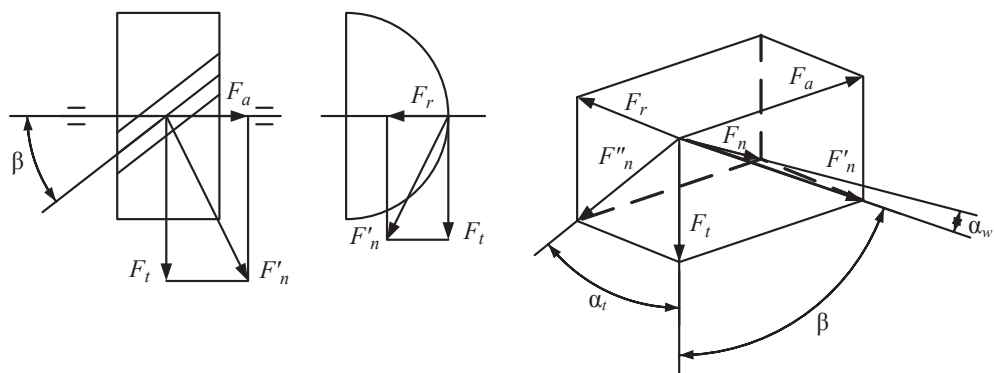


Рис. 4.17

Радиальное усилие определяем, используя значение окружного усилия

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = F_t \frac{\operatorname{tg} \alpha_w}{\cos \beta}. \quad (4.51)$$

Осевое усилие

$$F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (4.52)$$

Для определения направления окружного F_t и осевого F_a усилий можно пользоваться схемами, приведенными на рис. 4.18.

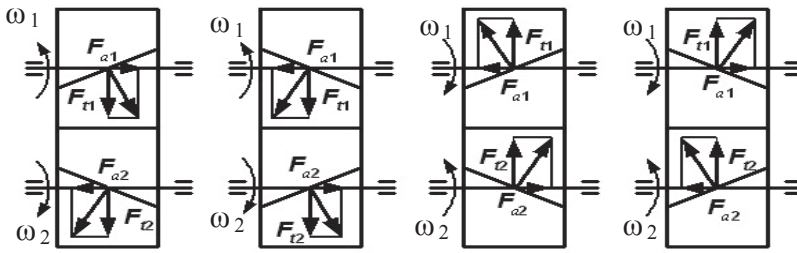


Рис. 4.18

4.4. Ременные передачи

Ременные передачи относятся к передачам с гибкой связью. Основными элементами простейшей ременной передачи являются два шкива — ведущий и ведомый. На шкивы надет предварительно натянутый ремень (рис. 4.19). Вращение ведущего шкива преобразуется во вращение ведомого шкива благодаря трению, развиваемому между ремнем и шкивами.

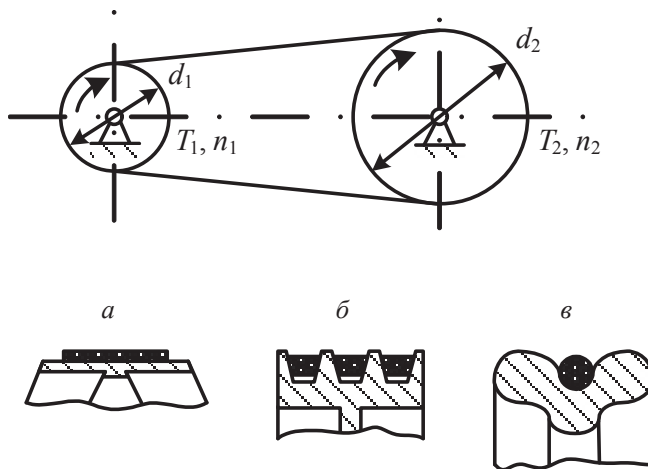


Рис. 4.19

По форме поперечного сечения ремни различаются на **плоские, клиновые и круглые**.

Плоские ремни в поперечном сечении представляют собой прямоугольник шириной, значительно превосходящей толщину.

Клиновые ремни в сечении представляют собой трапецию. Рабочими поверхностями клинового ремня являются его боковые стороны, которыми он соприкасается с боковыми сторонами канавки шкива. Эти ремни благодаря клиновому взаимодействию со шкивами характеризуются повышенным сцеплением с ними и, следовательно, **повышенной тяговой способностью**.

Основными критериями работоспособности ременных передач являются: **тяговая способность**, определяемая силой трения между ремнем и шкивом, и **долговечность ремня**, которая зависит в основном от величины возникающих в нем напряжений изгиба и от частоты циклов нагружений.

В настоящее время основной расчет ременных передач **выполняется по тяговой способности**. Долговечность ремня учитывают при расчете путем выбора основных параметров передачи в соответствии с рекомендациями, выработанными практикой.

Соответственно форме поперечного сечения ремня различают плоскоременные, клиноременные и круглоременные передачи. Наиболее распространены **плоскоременные** и **клиноременные** передачи. Плоскоременная передача проще клиноременной, но зато последняя обладает повышенной тяговой способностью и меньшими габаритами.

К достоинствам ременных передач, определяющим области их применения, относятся:

- возможность осуществления передачи между валами, расположенными на относительно большом расстоянии;
- плавность и безударность работы передачи;
- предохранение машины от перегрузок за счет упругого проскальзывания ремня (буксования);
- простота устройства;
- небольшая стоимость и простота ухода за передачей.

К основным недостаткам ременных передач относятся:

- относительно большие габариты;
- долговечность;
- непостоянство передаточного числа передачи вследствие зависимости упругого скольжения от нагрузки;
- повышенные нагрузки на валы и подшипники вследствие необходимости предварительного натяжения ремня.

Плоскоременные передачи применяют при сравнительно больших межосевых расстояниях. Кроме того, существуют плоскоременные передачи, работающие при высоких скоростях ремня (до 100 м/с).

При малых межосевых расстояниях и при передаче вращения от одного ведущего шкива к нескольким ведомым предпочтительнее *клиноременные* передачи.

Изменение нагрузочной способности передачи осуществляется в *плоскоременной* передаче в основном **изменением ширины ремня**, а в **клиноременной** — в основном **изменением числа ремней**. При большом числе ремней сложнее получить их равномерную загрузку из-за неодинаковой длины ремней, приводящей к неодинаковому натяжению, поэтому рекомендуют устанавливать в передаче не более 8 ремней.

Круглоремненные передачи применяют в малогабаритных машинах, например в настольных станках, различных приборах. В этих передачах ставится один ремень.

Натяжение ремней осуществляется упругим предварительным деформированием ремней, осуществляемым перемещением одного из шкивов передачи или при помощи натяжного ролика.

Натяжные ролики применяют с целью увеличения угла обхвата ремнем меньшего шкива преимущественно в плоскоременной и сравнительно редко — в клиноременной передаче. При одних и тех же габаритах передачи с натяжным роликом по сравнению с обыкновенной ременной передачей имеет следующие преимущества:

- можно передать большую мощность;
- силы давления на валы меньше;
- нет необходимости в частой перешивке плоского ремня из-за его вытягивания;
- ремни легко надевать на шкивы.

Однако на натяжных роликах ремни претерпевают дополнительный изгиб, направленный в противоположную сторону, по сравнению с изгибом на рабочих шкивах, что ведет к снижению долговечности ремня.

Ременные передачи в основном применяются для передачи мощностей от 0,3 до 50 кВт.

По материалу и конструкции различают ремни нескольких типов. Наиболее распространенные из них: прорезиненные тканевые, кожаные, хлопчатобумажные цельнотканые, шерстяные, синтетические.

Прорезиненные ремни самые распространенные. Они изготавливаются трех типов А, Б и В (см. рис. 4.20).

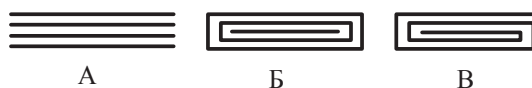


Рис. 4.20

Нарезные ремни типа А выполняют из нескольких слоев плетеной хлопчатобумажной ткани (бельтинга), между которыми для повышения гибкости помещаются прослойки из вулканизированной резины.

Ремни типа Б делают послойно завернутыми как с резиновыми прослойками, так и без них.

Спирально завернутые ремни типа В изготавливают из одного куска бельтинговой ткани без прослоек между прокладками.

Прорезиненные ремни изготавливают шириной от 20 до 1200 мм с числом прокладок от 2 до 9. Их делают обычно конечной длины в виде лент. Для повышенных скоростей и для машин массового выпуска прорезиненные ремни выполняют бесконечными шириной 30, 40 и 50 мм, толщиной 1,75; 2,5 и 3,3 мм и длиной от 500 до 2500 мм.

Из прорезиненных ремней преимущественное распространение получили ремни типа А, как наиболее гибкие.

Допускаемая наибольшая скорость для ремней типа А — 30 м/с, для ремней типа Б — 20 м/с и типа В — 15 м/с.

Кожанные ремни предназначены для передачи малых и средних мощностей. Кожанные ремни довольно дороги и применяются сравнительно редко. Они совершенно не пригодны для эксплуатации в местах сырых и насыщенных парами кислот и щелочей, так как они быстро выходят из строя.

Хлопчатобумажные цельнотканые ремни ткут из хлопчатобумажной пряжи в несколько переплетающихся слоев. Для предотвращения преждевременного выхода из строя из-за воздействия атмосферных влияний их пропитывают составом из озокерита и битума. Они самые дешевые, но по долговечности и нагрузочной способности уступают прорезиненным и кожаным и поэтому применяются для передачи небольших мощностей при скорости до 25 м/с при температуре до 50 °С для работы в сырых помещениях.

Шерстяные ремни ткут в несколько слоев из шерстяных и хлопчатобумажных нитей. Эти ремни пропитывают составом из олифы, порошкового мела и железного купороса. Они менее чувствительны, чем другие ремни, к воздействию повышенной температуры, влажно-

сти, паров кислот и щелочей, что и определяет области применения этих ремней. Они обладают значительной упругостью и поэтому хорошо работают при неравномерной и ударной нагрузке, при скорости до 30 м/с.

В последнее время широко используются пленочные (синтетические) ремни из пластмасс на основе полиамидных смол, армированные кордом из капрона или металлическими тросиками. Эти ремни обладают высокой статической и усталостной прочностью.

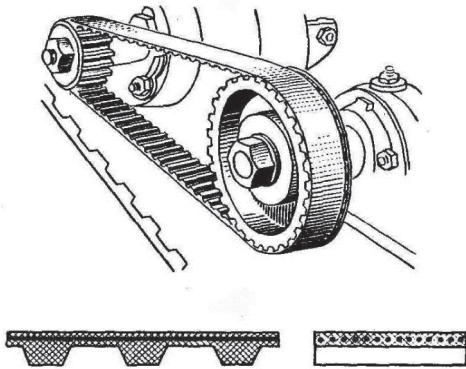


Рис. 4.21

При малой толщине (0,4–1,2 мм) они передают значительные нагрузки (до 15 кВт), могут работать при малых диаметрах шкивов и с быстроходностью до 100 м/с.

Находят применение также зубчатые ремни, сочетающие преимущества плоских ремней и зубчатых зацеплений. На рабочей поверхности ремней делают выступы, которые входят в зацепление с зубьями на шкивах (рис. 4.21).

Зубчатые ремни изготавливают из искусственных материалов, которые армируют стальными провололочными тросами. Для повышения износостойкости зубчатые ремни иногда покрывают нейлоновой тканью. *Зубчатые ремни* работают по принципу зацепления (как цепные передачи), а не трения (как все ремни с гладкой рабочей поверхностью). Поэтому передачи такими ремнями могут быть отнесены к ременным лишь условно; по сути дела — это «мягкие» цепные передачи.

Зубчатые ремни устанавливают без предварительного натяжения, они работают без скольжения и бесшумно. По сравнению с обыкновенными ременными **передачами** эта передача значительно более компактная и имеет более высокий КПД. Зубчатые ремни выпускают шириной от 5 до 380 мм для передачи мощности до 200 кВт и выше при скорости до 80 м/с.

Клиновые ремни для приводов общего назначения стандартизованы ГОСТ 1284.1–89. В соответствии с ГОСТ клиновые ремни изготавливают семи различных по размерам сечений, обозначаемых Z, А, В, С, D, Е, ЕО. Эти ремни выполняются бесконечными различных стан-

дартных длин. Угол клина ремней $\alpha = 40^\circ$. В ГОСТ 1284.3–80 указаны рекомендуемые сечения ремней в зависимости от передаваемой мощности и скорости ремня.

Допускаемая максимальная скорость для стандартных клиновых ремней профилей Z, A, B, C — 25 м/с и для профилей D, E, ЕО до 30 м/с.

4.4.1. Расчет плоскоременной передачи

Кинематика передачи

Очевидно, что сила натяжения ведущей ветви ремня F_1 , сбегаящей с ведомого шкива во время работы передачи, больше силы натяжения ведомой ветви его F_2 , набегающей на ведомый шкив. А так как деформация ремня пропорциональна силе его натяжения, то, следовательно, на ведущем шкиве ремень укорачивается и проскальзывает по шкиву (отстает от шкива), а на ведомом удлиняется, что также приводит к проскальзыванию (ремень опережает шкив). Таким образом, при работе ременной передачи происходит упругое скольжение ремня на шкивах и в соответствии с вышесказанным происходит потеря скорости на ведомом шкиве (рис. 4.22, а).

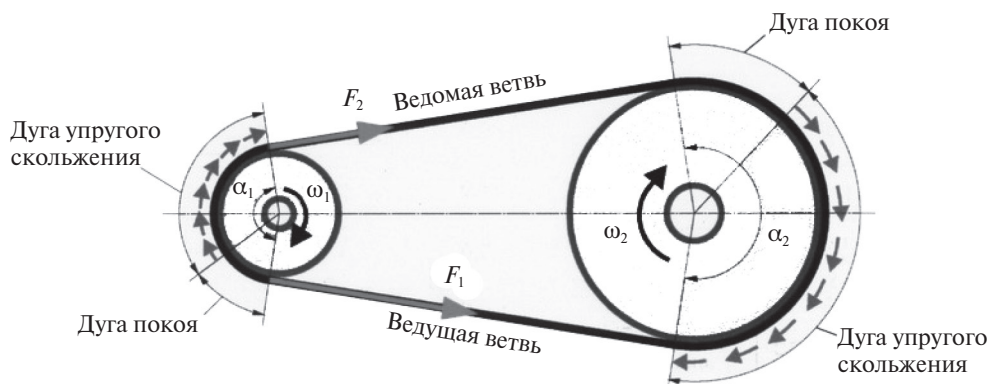


Рис. 4.22, а

Учитывая упругое скольжение ремня, можно записать

$$V_2 = V_1 \cdot (1 - \xi),$$

где V_1, V_2 — окружные скорости на шкивах; ξ — коэффициент скольжения.

Истинное передаточное число ременной передачи

$$u = d_2 / (d_1 \cdot (1 - \xi)). \quad (4.53)$$

Относительное скольжение ξ зависит от величины нагрузки, поэтому в ременной передаче передаточное число не является строго постоянным. При нормальных рабочих нагрузках $\xi = 0,01\text{--}0,02$, поэтому для обычных расчетов можно пользоваться формулой:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Передаточное отношение u рекомендуют принимать: для открытой ременной передачи $u \leq 6$, для плоскоремennой передачи с натяжным роликом и для клиноремennой передачи $u \leq 10$. В большинстве случаев $u \leq 4$.

Геометрия передачи

Обозначим: a — межосевое расстояние, β — угол между ветвями ремня, α — угол обхвата ремнем малого шкива, l — длина ремня, d_1 и d_2 — диаметры ведущего и ведомого шкивов (см. рис. 4.22, б).

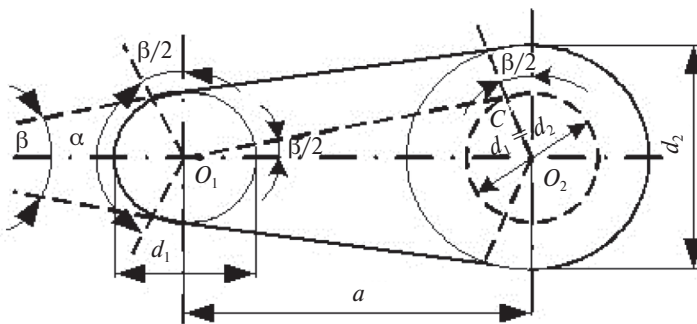


Рис. 4.22, б

При геометрическом расчете известными обычно являются d_1 , d_2 и a , определяется угол α и l . Вследствие вытяжки и провисания ремня величины a и l могут определяться приближенно.

$$\alpha = 180^\circ - \beta; \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2a}. \quad (4.54)$$

Приближенно принимая значение синуса равным аргументу, запишем

$$\beta \approx \frac{d_2 - d_1}{a} \text{ рад} \approx \frac{d_2 - d_1}{a} \cdot 57,3^\circ. \quad (4.55)$$

Длина ремня определяется как сумма прямолинейных участков и дуг обхвата:

$$l \approx 2 \cdot a + (d_2 + d_1) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}. \quad (4.56)$$

При заданной длине ремня l из формулы (4.56) можно определить необходимое межосевое расстояние:

$$a = \frac{2l - \pi(d_2 + d_1) + \sqrt{[2l - \pi(d_2 + d_1)]^2 - 8(d_2 - d_1)^2}}{8}. \quad (4.57)$$

Силы и силовые зависимости

Окружная (расчетная) сила на ведущем шкиве F

$$F = \frac{P}{V}, \quad (4.58)$$

где P — передаваемая мощность, V — окружная скорость ведущего шкива.

Силу начального (предварительного) натяжения ремня F_0 (см. рис. 4.23) принимают такой, чтобы ремень мог сохранять это натяжение достаточно длительное время, не подвергаясь большой вытяжке и не теряя требуемой долговечности.

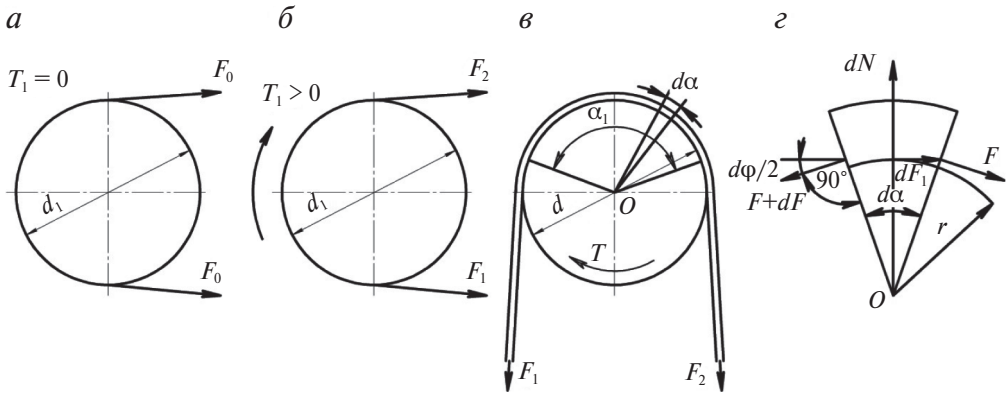


Рис. 4.23

Соответственно этому начальное напряжение в ремне σ_0 принимают:

- для плоских ремней без автоматических натяжных устройств $\sigma_0 = 1,8$ МПа,
- для плоских ремней с автоматическими натяжными устройствами $\sigma_0 = 2,0$ МПа,
- для клиновых ремней $\sigma_0 = 1,5$ МПа, для синтетических ремней $\sigma_0 = 3 \dots 4$ МПа.

Начальная сила натяжения ремня F_0 (рис. 4.23, а) равна:

$$F_0 = A \cdot \sigma_0,$$

где A — площадь поперечного сечения плоского ремня или площадь поперечного сечения всех ремней клиноременной передачи.

Силы натяжения ведущей F_1 и ведомой F_2 ветвей ремня в нагруженной передаче (рис. 4.23, б) определим следующим образом.

Из условия равновесия шкива крутящий момент на ведущем шкиве

$$T = \frac{d_1}{2} (F_1 - F_2), \quad (4.59)$$

а окружная сила

$$F = F_1 - F_2. \quad (4.60)$$

Поскольку сумма натяжения ветвей ремня постоянна независимо от того, нагружена передача или нет, то

$$F_1 + F_2 = 2F_0. \quad (4.61)$$

Из выражений (4.59) и (4.60) следует, что

$$\begin{cases} F_1 = F_0 + 0,5F \\ F_2 = F_0 - 0,5F. \end{cases} \quad (4.62)$$

Уравнения (4.62) устанавливают изменение натяжений ведущей и ведомой ветвей в зависимости от нагрузки F и предварительного натяжения F_0 , но не вскрывают тяговой способности передачи, которая связана с величиной силы трения между шкивом и ремнем.

Эйлер вывел зависимость для определения усилий в гибкой нерастяжимой нити, охватывающей неподвижный барабан.

Выделим из работающего ремня в пределах охвата им малого шкива элемент, соответствующий центральному углу $d\alpha$. При движении ремня с постоянной скоростью этот элемент ремня можно считать находящимся в равновесии.

На элемент (см. рис. 4.23, *г*) действуют следующие силы:

F и $F+dF$ — усилия, возникающие в торцовых поперечных сечениях элемента;

dN — нормальная реакция шкива;

dF — сила трения между шкивом и элементом.

Проектируем все силы на ось y :

$$\begin{aligned} 2F \sin \frac{d\alpha}{2} + dF \sin \frac{d\alpha}{2} - dN &= 0; \\ dN &= 2F \sin \frac{d\alpha}{2} + dF \sin \frac{d\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку угол $d\alpha$ бесконечно мал, примем $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$, а так как $dF \sin \frac{d\alpha}{2}$ представляет собой величину бесконечно малую второго порядка, отбрасываем ее:

$$dN = F \cdot d\alpha_1. \quad (4.63)$$

Сила трения между шкивом и элементами ремня

$$dF = fdN,$$

или, учитывая выражение (4.63), получим

$$dF = F \cdot fd\alpha. \quad (4.64)$$

Проектируем все силы на ось x :

$$-(F + dF) \cos \frac{d\alpha}{2} + F \cos \frac{d\alpha}{2} + fdN = 0.$$

Принимая $\cos \frac{d\alpha_1}{2} \approx 1$, получим

$$dF = dF. \quad (4.65)$$

Из выражения (4.64) и (4.65): $dF = f \cdot Fd\alpha$ или $\frac{dF}{F} = fd\alpha$.

Проинтегрируем последнее выражение в пределах изменения F от F_2 до F_1 и α — от 0 до α и получим **формулу Эйлера**:

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{f\alpha}. \quad (4.66)$$

Решая уравнения (4.60) и (4.66), получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha} - 1} \\ F_2 &= F \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha} - 1} \end{aligned} \right\}. \quad (4.67)$$

Эта формула устанавливает связь сил натяжения ветвей работающей передачи с величиной нагрузки F и факторами трения (f и α).

Минимально необходимая величина предварительного натяжения, при котором возможна передача заданной нагрузки F , равна:

$$F_0 \geq \frac{F}{2} \left(\frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \right). \quad (4.68)$$

Нетрудно установить, что увеличение значений коэффициента трения f и угла α обхвата шкива ремнем благоприятно отражается на работе передачи. Эти выводы приняты за основу при создании конструкций клиноременной передачи и передачи с натяжным роликом.

В первой передаче использован принцип искусственного повышения трения за счет заклинивания ремня в пазах шкива, благодаря чему приведенный коэффициент трения увеличивается в три раза по сравнению с плоским ремнем. Во второй — увеличивается угол обхвата α за счет натяжного ролика.

Напряжения в ремне

Наибольшие напряжения действуют в ведущей ветви ремня. Они складываются из напряжений растяжения в ведущей ветви σ_1 , напряжения σ_v растяжения от действия центробежной силы и напряжений σ_{u1} изгиба при огибании ремнем малого шкива (см. рис. 4.24).

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_u; \quad (4.69)$$

$$\sigma_1 = F_1/A, \quad (4.70)$$

где A — площадь сечения ремня: $A = \delta \cdot b$, b и δ — ширина и толщина ремня.

В той части ремня, которая огибает шкив, возникает **напряжение изгиба** σ_u . По закону Гука $\sigma_u = \varepsilon E$, где ε относительное увеличение волокон, а E — модуль упругости. При чистом изгибе $\varepsilon = y/r$.

Здесь y — расстояние от нейтрального слоя; r — радиус кривизны нейтрального слоя.

Эпюра напряжений в ремне ременной передачи

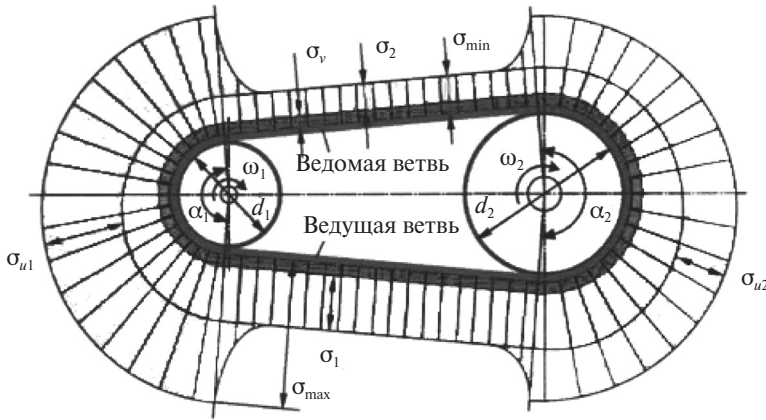


Рис. 4.24

На эпюре σ_1, σ_2 — напряжения растяжения в ведущей и ведомой ветвях; σ_v — напряжения от центробежных сил; σ_{u1}, σ_{u2} — напряжения изгиба на участках огибания шкивов ремнем;

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_{u1}; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_2 + \sigma_v.\end{aligned}$$

В нашем случае $y = \delta/2$, $r = (d + \delta)/2 \approx d/2$, $\varepsilon = \delta/d$.

$$\sigma_u = (\delta/d)E. \quad (4.71)$$

Следовательно, **напряжение изгиба в ремне прямо пропорционально толщине ремня и обратно пропорционально диаметру шкива**. Напряжение изгиба возникает при набегании элемента ремня на шкив и исчезает при сбегании ее со шкива. Вследствие этого напряжение изгиба изменяется по пульсирующему циклу с очень большой частотой и при соответствующей амплитуде вызывает разрушение от явления усталости.

Для уменьшения амплитуды этих напряжений применяются тонкие ремни и большие диаметры шкивов, выдерживая отношение:

$$\delta/d = 1/25 \dots 1/40.$$

Расчет ремня по кривым скольжения

Основным расчетом ремней является расчет их по тяговой способности. Тяговой способностью принято называть возможность передачи движения от ведущего шкива к ведомому без пробуксовки ремня. Работоспособность ременной передачи принято характеризовать кривыми скольжения и КПД (рис. 4.25).

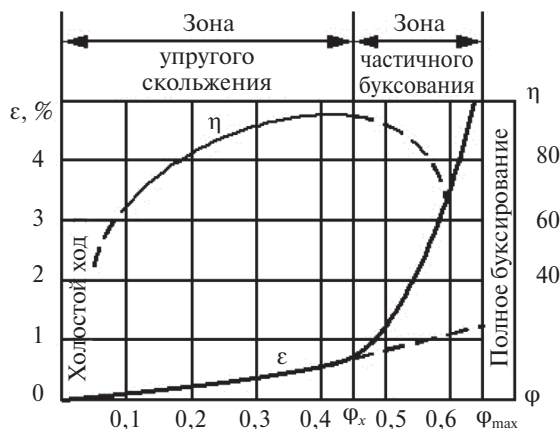


Рис. 4.25

Их строят следующим образом: по оси ординат откладывают относительное скольжение ремня ξ (%) и КПД передачи η (%), а по оси абсцисс коэффициент тяги передачи:

$$\varphi = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{F}{2F_0}; \quad \varphi = \frac{\sigma_t}{2\sigma_0}. \quad (4.72)$$

Коэффициент тяги представляет собой относительную нагрузку передачи.

С ростом нагрузки на ремень его упругое скольжение увеличивается по закону прямой линии, при этом значительно увеличивается КПД передачи. Эта закономерность наблюдается до критического значения коэффициента тяги φ_0 , соответствующего наибольшей допускаемой нагрузке на ремень.

С увеличением нагрузки свыше допускаемой дополнительно возникает проскальзывание его и появляется частичное буксование, что

сопровождается резким падением КПД передачи. При предельном значении $\varphi = \varphi_{\max}$ наступает полное буксование (проскальзывание) ремня.

По кривым скольжения и КПД следует, что наивыгоднейшая тяговая способность ремня соответствует критическому значению коэффициента тяги φ_0 . Экспериментально установлено, что в среднем для плоских ремней $\varphi_0 = 0,4 \dots 0,6$. Для клиновых ремней $\varphi_0 = 0,7 \dots 0,9$.

Расчет плоских ремней по тяговой способности производят по допускаемому полезному напряжению σ_{t0} , которое определяется на основе кривых скольжения.

Полезным напряжением ремня σ_{t0} называется отношение полезной нагрузки (окружного усилия) F_t к площади поперечного сечения.

$$\sigma_{t0} = \frac{F}{A}; \quad \varphi = \frac{F}{2F_0} = \frac{\left(\frac{F}{A}\right)}{\left(\frac{2F_0}{A}\right)} = \frac{\sigma_{t0}}{2\sigma_0},$$

отсюда:

$$\sigma_{t0} = 2\sigma_0\varphi_0; \quad A = \frac{F}{\sigma_{t0}}.$$

Выразив F через передаваемую мощность и учитывая соответствующие экспериментальные поправки, получим окончательную формулу для расчета ремня по кривым скольжения:

$$A = \frac{P(\text{Вт})}{V \cdot \sigma_{t0} \cdot K_\alpha \cdot K_V \cdot K_H \cdot K_\theta},$$

где A — площадь поперечного сечения ремня; V — скорость (м/с); σ_{t0} — полезное напряжение, зависящее от типа ремней и отношения d_1/δ ; K_α — коэффициент угла обхвата; K_V — скоростной фактор; K_H — коэффициент режима работы; K_θ — коэффициент, учитывающий способ натяжения ремня и угол наклона линии центров к горизонтали.

Долговечность ремня зависит не только от величин напряжений, но и от характера и частоты цикла изменений этих напряжений. Ча-

стота циклов напряжений прямо пропорциональна частоте пробегов ремня λ :

$$\lambda = V/l \leq [\lambda].$$

Для обыкновенных плоских ремней $\lambda \leq 5 \text{ с}^{-1}$.

Для специальных быстроходных плоских и клиновых ремней $\lambda \leq 10 \text{ с}^{-1}$ и в особых случаях $\lambda \leq 10\text{--}20 \text{ с}^{-1}$.

Порядок расчета плоскоременной передачи

При заданной передаваемой мощности P (Вт), угловой скорости ведущего шкива ω_1 (1/с) и передаточном числе u расчет ведется в следующем порядке:

- Диаметр ведущего шкива $d_1 \approx 6\sqrt[3]{T_1}$ (мм). Затем он округляется до стандартного значения;
- Диаметр ведомого шкива $d_2 = d_1 u (1 - \xi)$ (мм) и также округляется до стандартного;
- Толщина ремня $\delta = d_1 / (25 \dots 40)$ (мм) и округляется до стандартной величины;
- Скорость ремня $V = 0,5 \cdot \omega_1 \cdot d_1 / 1000$ (м/с);
- Межосевое расстояние передачи (см. рис. 1.21) $a = 2 (d_1 + d_2)$;
- Угол обхвата малого шкива $\alpha_1 = 180^\circ - 57,3^\circ (d_2 - d_1) / a$;
- Длина ремня $\ell \approx 2 \cdot a + (d_2 + d_1) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}$;
- Площадь поперечного сечения ремня $A = \frac{P(\text{Вт})}{V \cdot \sigma_{t0} \cdot K_\alpha \cdot K_V \cdot K_H \cdot K_\theta}$;
- Ширина ремня $b = \frac{A}{\delta}$ и округляется до стандартного значения.

Определяется частота пробегов ремня

$$\lambda = V/l \leq [\lambda].$$

Расчет круглых ремней по тяговой способности производят по тем же формулам, по которым рассчитывают плоские ремни.

Расчет на долговечность ограничивают проверкой числа пробегов ремня на шкивах по формуле: $\lambda = V/l \leq [\lambda]$.

4.4.2. Клиноременная передача

В этой передаче (рис. 4.26) ремень имеет трапецидальную форму поперечного сечения и располагается в соответствующих канавках шкивов. В передаче обычно работают несколько ремней. Несколько тонких ремней применяют взамен одного толстого с целью уменьшить напряжения изгиба.

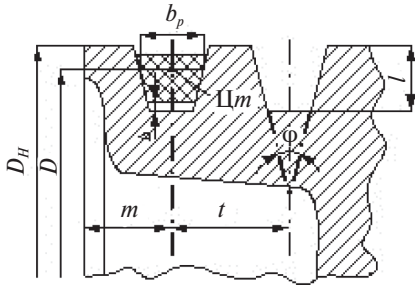


Рис. 4.26

Расчетным диаметром D является диаметр, соответствующий окружности расположения центров тяжести поперечного сечения ремня, которые тоже стандартизованы ГОСТ 1284.1–89.

Применение клинового ремня позволило увеличить тяговую способность передачи за счет повышения трения.

Сила трения действует в направлении окружной силы (рис. 4.27).

Т.к. $\bar{R} + \frac{\bar{F}_n}{2} + \frac{\bar{F}_n}{2} = 0$, то на основе графика сил получим $F_{тр} = 2 \frac{F_n}{2} f = R \frac{f}{\sin \frac{\varphi}{2}}$

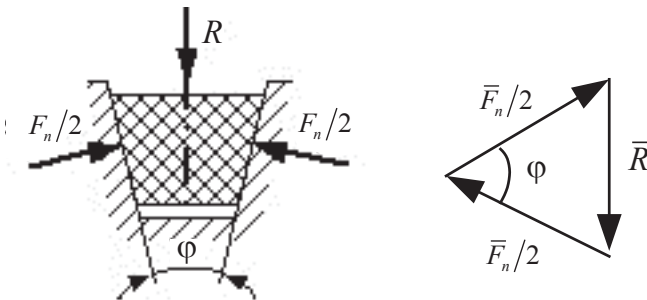


Рис. 4.27

Величина $\left(\frac{f}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$ называется приведенным коэффициентом трения.

При $\varphi = 40^\circ$ приведенный коэффициент трения в три раза больше коэффициента трения f плоского ремня по шкиву.

Увеличение тяговой способности позволяет применять клиноременные передачи с малым углом обхвата $\alpha_{\min} \approx 120^\circ$, что дает возможность уменьшить габариты передачи, увеличить передаточное число.

Существует форма расчета по таблицам мощностей P_0 , которые может передавать один ремень простой двухшківной передачи при заданных скорости и диаметре малого шківа при $u = 1$, $\alpha = 180^\circ$, длине ремня, спокойной работе и заданной долговечности.

Тип ремня выбирается в зависимости от передаваемой мощности и частоты вращения быстроходного шківа.

Мощность, которую может передать один ремень в реальных условиях,

$$[P_1] = P_0 \cdot C_\alpha \cdot C_p \cdot C_L \cdot C_u.$$

Здесь C_α — коэффициент угла обхвата; C_p — коэффициент режима работы; C_L — коэффициент длины ремня; C_u — коэффициент передаточного числа.

Необходимое число ремней

$$Z = P \cdot K_F / ([P_1] \cdot C_z),$$

где K_F — коэффициент динамичности нагрузки; C_z — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между ремнями.

Существует также методика ИСО, по которой долговечность ремня определяется на основе гипотезы линейного суммирования усталостных повреждений.

4.4.3. Нагрузка на валы и опоры

Силы натяжения ветвей передаются на валы и опоры (см. рис. 4.28). Равнодействующая F_B :

$$F_B = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} \approx 2F_0 \cos \frac{\beta}{2}, \quad F_B = 2F_0 \sin \alpha_1,$$

где α_1 — угол обхвата малого шківа.

Обычно F_B в два-три раза больше окружной силы F .

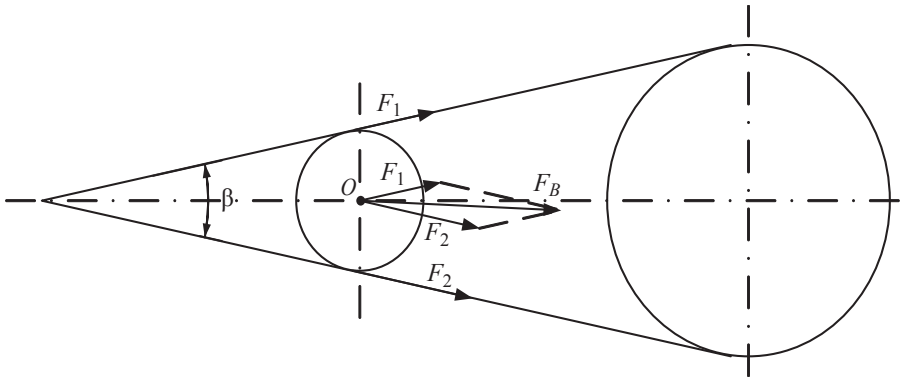


Рис. 4.28

4.5. Цепные передачи

Цепную передачу относят к передачам зацеплением с гибкой связью. Она состоит из ведущей и ведомой звездочек, огибаемых цепью. На рис. 4.29, *а* показана передача с однорядной роликовой цепью. На рис. 4.29, *б* — передача с многорядной роликовой цепью.

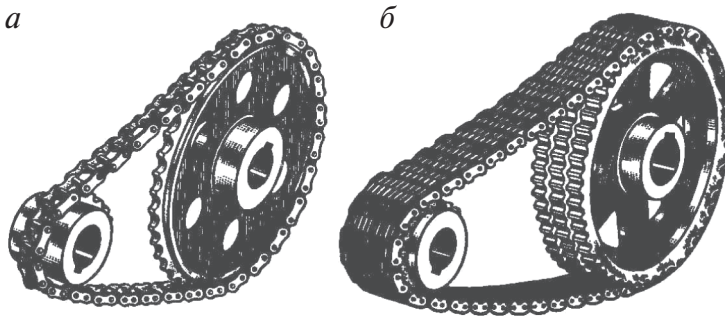


Рис. 4.29

Достоинства цепных передач:

- по сравнению с зубчатыми передачами цепные передачи могут передавать движение между валами при значительных межосевых расстояниях;
- по сравнению с ременными передачами — более компактны, могут передавать большие мощности, требуют значительно меньшие силы предварительного натяжения, обеспечивают

постоянство передаточного числа благодаря отсутствию скольжения и буксования.

Недостатки:

- Значительный шум при работе, возникающий из-за ударов звеньев цепи о зуб звездочки при входе в зацепление (этот недостаток ограничивает применение цепных передач при больших скоростях);
- сравнительно быстрое изнашивание шарниров цепи;
- необходимость применения системы смазки;
- удлинение цепи из-за износа шарниров требует применения натяжных устройств.

Области применения:

В станках, промышленных роботах, в транспортных, сельскохозяйственных и других машинах для передачи вращательного движения между параллельными валами на значительные расстояния, когда применение зубчатых передач нецелесообразно, а ременных невозможно. Передаваемые мощности и скорость цепи: $P < 120$ кВт, $v \leq 15$ м/с.

4.5.1. Приводные цепи

Приводная цепь — главный элемент цепной передачи — состоит из соединенных шарнирами отдельных звеньев. Помимо приводных цепей бывают тяговые и грузовые цепи, которые ниже не рассмотрены.

Основные типы приводных цепей: роликовые, втулочные и зубчатые стандартизованы.

Роликовые приводные цепи состоят из двух рядов наружных и внутренних пластин (рис. 4.30). В наружные пластины запрессованы оси, пропущенные через втулки, запрессованные, в свою очередь, во внутренние пластины. На втулки предварительно свободно надеты закаленные ролики.

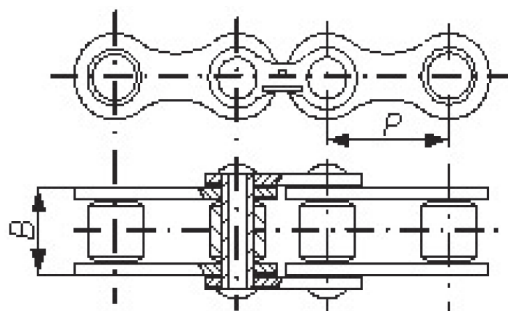


Рис. 4.30

При относительном повороте звеньев ось проворачивается во втулке, образуя шарнир скольжения. Зацепление цепи со звездочкой про-

исходит через ролик, который, поворачиваясь на втулке, перекачивается по зубу звездочки. Такая конструкция позволяет выровнять давление зуба на втулку и уменьшить изнашивание как втулки, так и зуба.

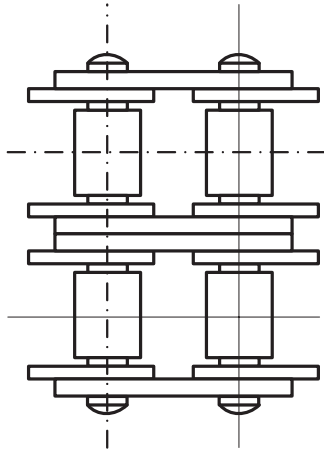


Рис. 4.31

Роликовые цепи имеют широкое распространение (табл. 4.4). Их применяют при скоростях $v < 15$ м/с.

Втулочные приводные цепи по конструкции подобны роликовым, но не имеют роликов, что удешевляет цепь, уменьшает ее массу, но существенно увеличивает износ втулок цепи и зубьев звездочек. Втулочные цепи применяют в неответственных передачах при $v < 1$ м/с.

Втулочные и роликовые цепи изготавливают однорядными и многорядными с числом рядов 2, 3 и 4. На рис. 4.31 показана двухрядная роликовая цепь. Многорядная цепь с меньшим шагом по сравнению с однорядной позволяет уменьшить габариты и динамические нагрузки в передаче.

Таблица 4.4

Цепи приводные роликовые однорядные по ГОСТ 13568–97 (выборка)

Шаг цепи p , мм	Диаметр оси d_0 , мм	Ширина внутреннего звена, B , мм	Разрушающая сила F_p , кН	Масса q одного метра цепи, кг/м
19,05	5,96	17,75	31,8	1,9
25,4	7,95	22,61	60	2,6
31,75	9,55	27,46	89	3,8

Пластины цепи очерчены контуром, напоминающим цифру 8 и обеспечивающим равную прочность пластины во всех сечениях. Концы осей расклепывают, поэтому звенья цепи неразъемные.

Соединение концов цепи при четном числе ее звеньев производят соединительным звеном. Целесообразно применять цепи с четным числом звеньев.

Зубчатые приводные цепи (см. рис. 4.32) состоят из звеньев, составленных из набора пластин и шарнирно соединенных между собой.

Каждая пластина имеет по два зуба и впадину между ними для размещения зуба звездочки.

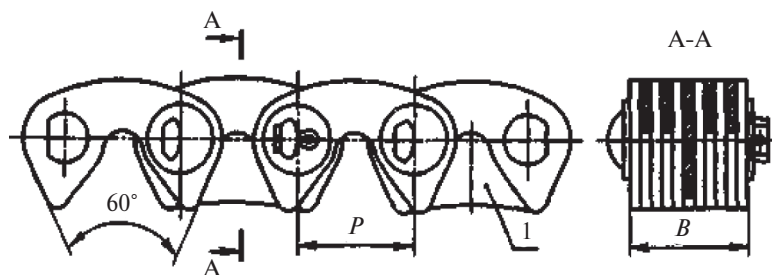


Рис. 4.32

Число пластин определяет ширина цепи B , которая зависит от передаваемой мощности. Рабочими гранями являются плоскости пластин, расположенные под углом 60° . Этими гранями каждое звено цепи вклинивается между двумя зубьями звездочки, имеющими трапециевидный профиль. Благодаря этому *зубчатые цепи работают плавно, с малым шумом, лучше воспринимают ударную нагрузку и допускают более высокие скорости*. Однако по сравнению с другими зубчатые цепи тяжелее и дороже (табл. 4.5). Их применяют при скоростях $V < 35$ м/с.

Таблица 4.5

Приводные зубчатые цепи типа ПЗ-1 (выборка из ГОСТ 13552)

Шаг цепи p , мм	Ширина цепи B , мм	Разрушающая сила на 1 мм ширины F_p , Н/мм	Масса q одного метра цепи на 10 мм ширины, кг/(м * мм)
12,70	22,5 ... 52,5 (через 6 мм)	1150	0,58
15,875	30 ... 70 (через 8 мм)	1370	0,72
19,05	45 ... 93 (через 12 мм)	1640	0,86

Для устранения бокового спадания цепи со звездочек применяют направляющие пластины 1 (рис. 4.32), расположенные в середине или по бокам цепи.

Относительный поворот звеньев обеспечивают шарниры скольжения или качения. Цепи с шарнирами качения более дорогие, но имеют малые потери на трение, высокие КПД и долговечность. Шарнир трения качения (см. рис. 4.33) состоит из двух призм 1 и 2 с цилиндрическими рабочими поверхностями, которые и обеспечивают трение ка-

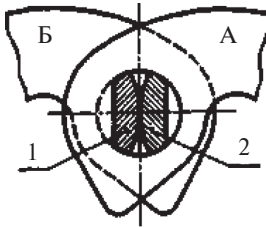


Рис. 4.33

чения. Длина призм равна ширине цепи. Призма 1 закреплена в фигурном пазе пластины *А*, призма 2 — в пластине *Б*. При повороте звеньев призмы обкатываются одна по другой.

Шаг цепи p является основным параметром цепной передачи. Чем больше шаг, тем выше нагрузочная способность цепи, но сильнее удар звена о зуб в момент набегания на звездочку, меньше плавность, сильнее шум, больше износ шарниров. При больших скоростях принимают цепи с малым шагом.

В быстроходных передачах при больших мощностях рекомендуют цепи малого шага: зубчатые большой ширины или роликовые многорядные. Максимальное значение шага цепи ограничивают частотой вращения малой звездочки по условию $n_1 < n_{1\max}$. Максимальные частоты вращения ведущей звездочки представлены в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Наибольшие допустимые частоты вращения $n_{1\max}$ малой звездочки

Частота вращения $n_{1\max}$, об/мин	Шаг p , мм					
	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1
Для роликовой и втулочной цепи	1250	1000	900	800	630	500
Для зубчатой цепи	3300	2650	2200	1650	1320	

Материалы цепей

Цепи должны быть износостойкими и прочными. Пластины цепей изготавливают из сталей 50, 40Х и других с закалкой до твердости

$H = 40 \dots 50$ НRC. Оси, втулки, ролики и призмы — из цементуемых сталей 20, 15Х и других с закалкой до твердости $H = 52 \dots 65$ НRC.

4.5.2. Звездочки

Звездочки цепных передач отличаются от зубчатых колес лишь профилем зубьев, размеры и форма которых зависят от типа цепи. На рис. 4.34 показана конструкция звездочки для роликовой цепи.

Делительная окружность звездочек проходит через центры шарниров цепи. Диаметр делительной окружности равен $d = \frac{p}{\sin\left(\frac{180}{z}\right)}$, где z — число зубьев звездочки.

Шаг цепи у звездочек измеряют по хорде делительной окружности (рис. 4.34 и 4.35). Делительный диаметр звездочки для зубчатых цепей больше ее наружного диаметра. Для увеличения долговечности цепной передачи принимают по возможности большее число зубьев меньшей звездочки. При малом числе зубьев в зацеплении находится небольшое число звеньев, что снижает плавность работы передачи и увеличивает изнашивание из-за большого угла поворота шарнира. Однако с уменьшением числа зубьев звездочки увеличивается возможная величина вытягивания цепи при износе и срок ее службы.

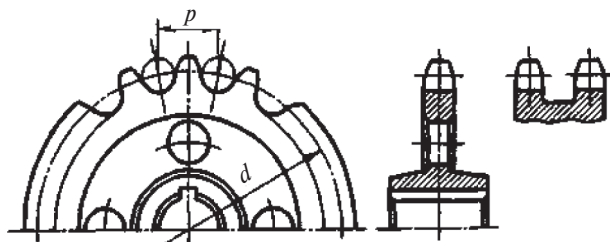


Рис. 4.34

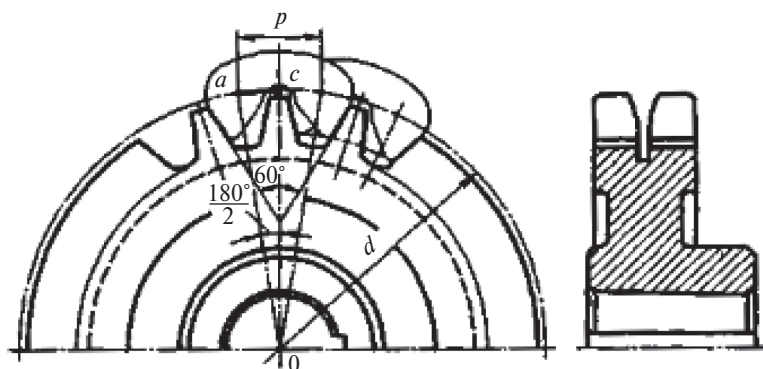


Рис. 4.35

Число зубьев малой звездочки z_1 принимают из условия обеспечения минимальных габаритов и плавного хода передачи и долговечности передачи; для роликовых и втулочных цепей $z_1 = 29 - 2u$ при условии $z_1 \geq 13$, для зубчатых цепей: $z_1 = 35 - 2u$ при условии $z_1 \geq 17$, где u — передаточное число.

Число зубьев малой звездочки принимают: при высоких частотах вращения $z_{\min} = 19 \dots 23$; средних $z_{\min} = 17 \dots 19$; низких $z_{\min} = 13 \dots 15$. В передачах с зубчатыми цепями z_{\min} больше на 30 %. Максимальное число

зубьев большой звездочки ограничивается долговечностью цепи: для втулочной цепи $z_2 < 90$, для роликовой $z_2 < 120$, для зубчатой $z_2 < 140$.

Предпочтительно принимать нечетные числа зубьев звездочек, что в сочетании с четным числом звеньев цепи способствует более равномерному ее изнашиванию.

Материал звездочек должен быть износостойким и хорошо сопротивляться ударным нагрузкам. Звездочки изготавливают из сталей 45, 40Х и других с закалкой или из цементуемых сталей 15, 20Х и др. С целью снижения уровня шума и изнашивания цепи в быстроходных передачах изготавливают зубчатый венец звездочек из пластмасс.

4.5.3. Передаточное число цепной передачи

$$\text{Среднее передаточное отношение } u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное число цепной передачи меняется в пределах поворота звездочки на один зуб, что заметно при малом числе зубьев z_1 звездочки. Непостоянство u не превышает 1–2 %, но вызывает неравномерность хода передачи и поперечные колебания цепи. Среднее передаточное число за оборот постоянно. Для цепных передач рекомендуют $u < 7$.

4.5.4. Основные геометрические соотношения в цепных передачах

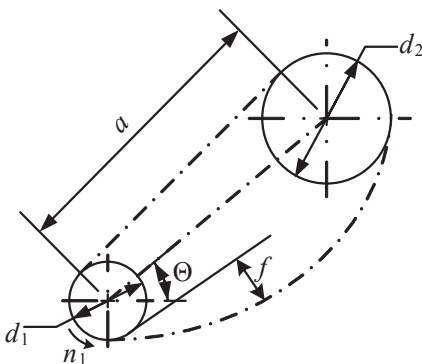


Рис. 4.36

Оптимальное межосевое расстояние передачи принимают из условия долговечности цепи $a = (30–50)p$, где p — шаг цепи (рис. 4.36).

Меньшие значения для $u = 1...2$ и большие для $u = 6...7$.

Длину L_p цепи в шагах вычисляют по формуле, аналогичной формуле для определения длины ремня:

$$L_p = \frac{2a}{p} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_1 - z_2}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{p}{a}.$$

Длину L_p цепи в шагах (число звеньев в цепи) округляют до целого четного числа.

Межосевое расстояние передачи находят по формуле:

$$a = \frac{p}{4} \left[L_p - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(L_p - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{z_1 - z_2}{2\pi} \right)^2} \right].$$

4.5.5. Силы в цепной передаче

Окружная сила F_t , Н, передаваемая цепью: $F_t = 2000 T_1/d_1$, где d_1 — делительный диаметр звездочки, мм; T_1 — крутящий момент на звездочке, Н·м.

Предварительное натяжение цепи от провисания ведомой ветви:

$$F_0 = k_f \cdot q \cdot a \cdot g,$$

где q — масса одного метра цепи, кг/м; a — межосевое расстояние, м. $g = 9,81$ м/с²; k_f — коэффициент провисания: для горизонтальных передач $k_f = 6$; для наклоненных к горизонту до 45° $k_f = 3$; для вертикальных $k_f = 1$.

Натяжение цепи от центробежных сил:

$$F_v = q V^2.$$

Сила F_v нагружает звенья цепи по всему ее контуру, но звездочками не воспринимается.

Натяжение ведущей ветви цепи работающей передачи (рис. 4.37)

$$F_1 = F_t + F_0 + F_v.$$

Натяжение ведомой ветви цепи F_2 равно большему из натяжений F_0 или F_v .

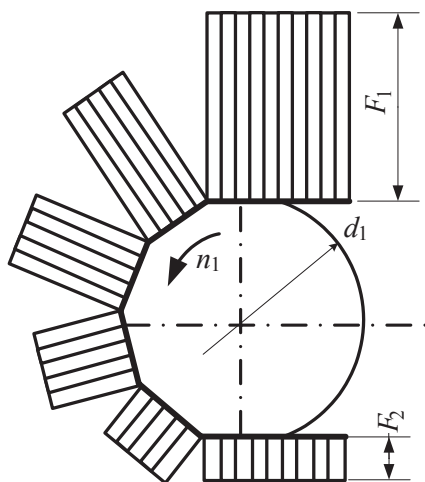


Рис. 4.37

Нагрузка на валы звездочек. Цепь воздействует на валы звездочек с силой:

$$F_n = k_B F_t + 2F_0,$$

где k_B — коэффициент нагрузки вала, определяемый в зависимости от угла θ наклона линии, соединяющей центры вращения звездочек к горизонту.

Угол наклона θ	0...45°	45...90°
Коэффициент нагрузки вала при спокойной нагрузке k_B	1,15	1,05

При ударной нагрузке k_B увеличивают на 10...15 %. Направление силы F_n принимают по линии центров звездочек.

4.5.6. Расчет передачи роlikовой цепью

Критерии работоспособности. Основным критерием работоспособности цепных передач является **долговечность цепи**, определяемая изнашиванием шарниров. За основной принят расчет цепных передач, обеспечивающий износостойкость шарниров цепи. При этом цепи обладают достаточной прочностью.

Долговечность приводных цепей по изнашиванию составляет 8...10 тыс. часов работы.

Ориентировочная величина шага однорядной цепи в миллиметрах равна

$$t = 13 \sqrt[3]{\frac{T_1}{z_1 v}},$$

где T_1 — момент, Н·м; v — коэффициент числа рядов в цепи: для однорядной цепи $v = 1$, двухрядной $v = 1,7$, трехрядной $v = 2,5$.

После выбора стандартного шага цепи определяют геометрические размеры звездочек, межосевое расстояние, длину цепи. Затем проводят уточненный расчет передачи по нагрузочной способности цепи.

Нагрузочная способность цепи ограничена средним допускаемым давлением $[p_c]$ в шарнире звена цепи:

$$p_u = \frac{F_t K_9}{A} \leq [p_u],$$

где F_t — окружная сила, передаваемая цепью; A — площадь проекции опорной поверхности шарнира: для роликовых (втулочных) цепей $A = d_o B$; здесь d_o — диаметр оси, B — длина втулки; K_9 — коэффициент эксплуатации

$$K_9 = K_d K_c K_\theta K_{\text{рег}} K_p.$$

Здесь K_d — коэффициент динамичности нагрузки: при равномерной нагрузке $K_d = 1$ (ленточные, цепные конвейеры), при толчках $K_d = 1,2 \dots 1,5$ (металлорежущие станки, компрессоры); K_c — коэффициент способа смазывания: при непрерывном смазывании $K_c = 9,8$, при регулярном капельном $K_c = 1$, при периодическом $K_c = 1,5$; K_θ — коэффициент, учитывающий угол θ наклона линии центров передачи к горизонту. При $\theta < 45^\circ$ $K_\theta = 1$; при $\theta > 45^\circ$ $K_\theta = 0,15 (\theta)^{0,5}$; $K_{\text{рег}}$ — коэффициент способа регулирования натяжения цепи:

- при регулировании положения оси одной из звездочек $K_{\text{рег}} = 1$,
- при регулировании оттяжными звездочками или нажимными роликами $K_{\text{рег}} = 1,1$,
- для нерегулируемой передачи $K_{\text{рег}} = 1,25$;

K_p — коэффициент режима работы: при односменной работе $K_p = 1$, при двухсменной $K_p = 1,25$, при трехсменной $K_p = 1,45$.

4.5.7. Натяжение и смазывание цепи. КПД цепных передач

Натяжение цепи. По мере изнашивания шарниров цепь вытягивается, стрела провисания f ведомой ветви увеличивается (см. рис. 4.36), что вызывает захлестывание звездочки цепью. Экспериментально установлены максимальные величины провисания цепи: для передач с углом $\theta < 45^\circ$ наклона к горизонту $[f] < 0,02a$; при $\theta > 45^\circ$ — $[f] < 0,015a$, где a — межосевое расстояние.

Регулирование натяжения цепи осуществляют устройствами, аналогичными применяемым для натяжения ремня, т. е. перемещением вала одной из звездочек, нажимными роликами или оттяжными звездочками.

Натяжные устройства должны компенсировать удлинение цепи в пределах двух звеньев, при большей вытяжке — два звена цепи уда-

ляют. Увеличение шага цепи вследствие износа в шарнирах не компенсируется ее натяжением. По мере изнашивания цепи шарниры располагаются все ближе к вершинам зубьев, и возникает опасность соскакивания цепи со звездочек.

Смазывание цепи оказывает решающее влияние на ее долговечность. При скорости цепи $v < 4$ м/с применяют капельное постоянное (4...10 кап/мин) или внутришарнирное смазывание. При $v < 7$ м/с — смазывание погружением в масляную ванну (ведомую ветвь цепи погружают на высоту пластин) или масленками — капельницами (20 кап/мин). При $v < 12$ м/с — смазывание погружением в масляную ванну или циркуляционное струйное смазывание от насоса.

В тихоходных малонагруженных передачах применяют периодическое смазывание ручной масленкой через 6...8 часов работы.

КПД передачи зависит от потерь на трение в шарнирах цепи, в контакте цепи с зубьями звездочек, в опорах валов, а также на перемешивание масла при смазывании погружением. Обычно среднее значение КПД $\eta = 0,95...0,98$.

4.5.8. Рекомендации по конструированию цепных передач

- В приводах с быстроходными двигателями цепную передачу, как правило, устанавливают после редуктора.
- Ведомую ветвь цепи рекомендуют располагать внизу во избежание подхватывания ее звеньев зубьями ведущей звездочки.
- Для обеспечения достаточного самонатяжения цепи не следует делать угол θ наклона линии центров звездочек к горизонту более 60° . При $\theta > 60^\circ$ на ведомую ветвь в месте наибольшего провисания цепи желательно устанавливать натяжную звездочку. Диаметр натяжной звездочки выполняют больше диаметра меньшей звездочки передачи, она должна входить в зацепление не менее чем с тремя звеньями цепи.
- Поскольку цепь в поперечном сечении не обладает гибкостью, валы цепной передачи должны быть параллельными, а звездочки установлены в одной плоскости.
- Применение трех- и четырехрядных цепей нежелательно, так как они дороги и требуют повышенной точности изготовления звездочек и монтажа передачи.

4.6. Валы и оси

Валы и оси предназначены для поддержания вращающихся частей машин. В конструктивном отношении у валов и осей много общего, но в характере их работы, а следовательно, и в методах их расчета имеются некоторые различия.

- Оси не участвуют в передаче крутящего момента. Они воспринимают изгибающие моменты, а иногда и осевые силы. Оси могут быть вращающимися, например вагонная ось, и невращающимися, например оси роликов в роликанге и др.

- Валы всегда участвуют в передаче механической работы и воспринимают крутящие и изгибающие моменты, а иногда и осевые силы; это детали подвижные. Валы отличаются большим разнообразием конструкций.

Они классифицируются по следующим признакам (см. рис. 4.38):

- по форме геометрической оси (прямые коленчатые, гибкие);
- по профилю поперечного сечения (круглые, цилиндрические, шлицевые, граненые);
- по числу опор (консольные или полуоси, двухопорные, многоопорные);
- по наличию осевого отверстия (сплошные и полые).

Валы и оси изготавливаются из углеродистых и легированных конструкционных сталей различных марок. При выборе материала и соответствующей термической обработке учитываются условия работы детали и механические свойства материала (см. табл. 4.7).

Таблица 4.7

Механические характеристики сталей

Марка стали	Диаметр вала D_m , мм	Термообработка	Твердость поверхности	Предел прочности, МПа	Предел текучести, МПа
45	Любой	Н	179–207 НВ	600	320
45	125	У	235–262 НВ	780	540
45	80	У	269–302 НВ	890	650
40Х	200	У	235–262 НВ	790	640
40Х	125	У	269–302 НВ	900	750
40Х	125	У+3 (ТВЧ)	45–50 HRCэ	900	750
40ХН	315	У	235–262 НВ	800	630

Окончание табл. 4.7

Марка стали	Диаметр вала D_m , мм	Термообработка	Твердость поверхности	Предел прочности, МПа	Предел текучести, МПа
40ХН	200	У	269–302 НВ	920	750
40ХН	200	У+3 (ТВЧ)	48–53 HRCэ	920	750
35ХМ	315	У	235–262 НВ	800	670
35ХМ	200	У	269–302 НВ	920	790
35ХМ	200	У+3 (ТВЧ)	48–53 HRCэ	920	790
20Х	200	У+Ц+3	56–63 HRCэ	1000	800
20ХНМ	200	У+Ц+3	56–63 HRCэ	1000	800
18ХГТ	200	У+Ц+3	56–63 HRCэ	1000	800

Примечание: здесь приняты следующие обозначения: D_m — предельный наружный диаметр заготовки, способы термообработки: Н — нормализация, У — улучшение, 3 — закалка, Ц — цементация.

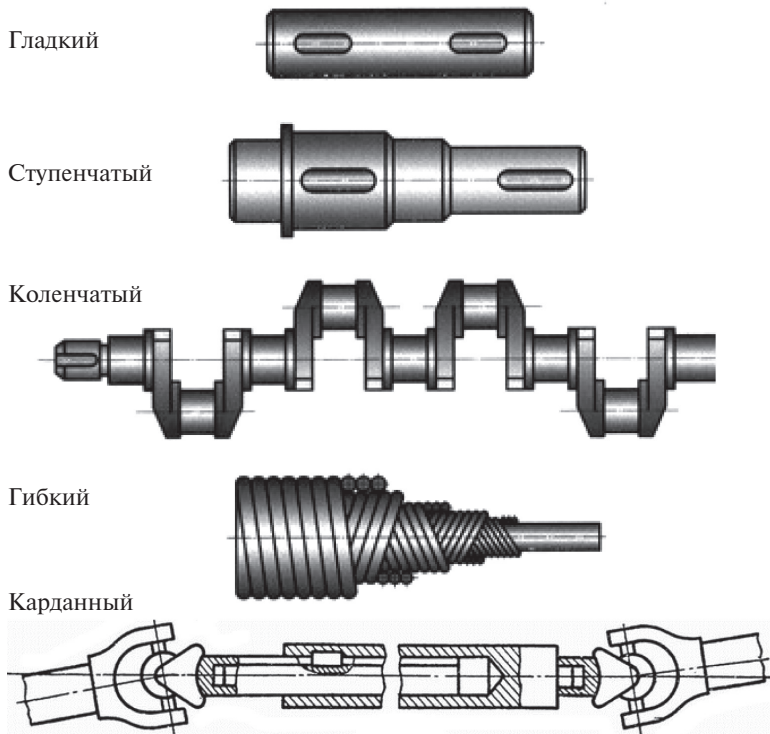


Рис. 4.38

При использовании материалов с повышенной прочностью необходимо учитывать, что расчетный диаметр вала может получиться

слишком малым. В результате вал, удовлетворяющий условиям прочности, может оказаться недостаточно жестким.

4.6.1. Расчет валов

Валы рассчитываются на прочность, жесткость и на отсутствие резонансных колебаний. Для выполнения этих расчетов необходимо знать его конструктивные размеры (диаметры участков вала и их длины, места приложения нагрузок и т. п.). Однако проектирование вала невозможно без хотя бы приближенного определения его диаметра.

Расчет валов на прочность, как правило, выполняется в два этапа: проектный (предварительный) расчет и уточненный (проверочный).

Проектный расчет валов

При проектном расчете обычно известны крутящие моменты T , нагрузка и основные размеры деталей, расположенных на валу. Требуется определить диаметр вала. Предварительная оценка диаметра вала производится из расчета только на кручение путем подстановки в расчетные формулы заниженных допускаемых напряжений на кручение $[\tau_{кр}] \leq 12...25$ МПа.

Расчет наименьшего диаметра d (мм) вала ведется исходя из уравнения прочности:

$$\tau_{кр} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau_{кр}],$$

или

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2 \cdot [\tau_{кр}]}}$$

где $W_p = 0,2d^3$ — полярный момент сопротивления; T — крутящий момент, Н·мм.

Диаметр вала можно предварительно выбрать, также ориентируясь на диаметр присоединяемого к нему вала другого механизма.

Полученное значение диаметра округляется до стандартного ближайшего значения.

После предварительного выбора диаметра вала разрабатывают его конструкцию и производят выбор подшипников, шпонок и конструктивное оформление вала. При конструировании вала устанавливаются диаметры и длины цапф соответствующих ступеней вала, определяются радиусы галтелей, размеры заплечиков, фасок и шпоночных канавок; устанавливается чистота поверхностей и выбираются посадки.

Проверочные расчеты валов

Расчет на усталостную прочность (выносливость) производится с целью предотвращения усталостного разрушения вала. Расчет ведут по наибольшей длительно действующей нагрузке, повторяемость которой за время службы вала составляет не менее 10^3 циклов. Если график изменения нагрузки во времени не задан, то наибольшая длительно действующая нагрузка определяется по номинальной мощности двигателя.

Расчет заключается в определении запасов прочности с учетом формы, абсолютных размеров вала, состояния поверхностей. При переходе от конструкции к расчетной схеме производят схематизацию нагрузок, опор и формы вала. При этом используют три основных типа опор: шарнирно-подвижную, шарнирно-неподвижную, защемленную. Действующие нагрузки рассматриваются как сосредоточенные. После составления расчетной схемы вала производится определение реакций опор, построение эпюр нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов.

Коэффициент запаса прочности S вала определяется по формуле:

$$S = \frac{S_\sigma \cdot S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \geq [S] = 1,5..2,5,$$

где S_σ , S_τ — коэффициенты запаса прочности по нормальным, касательным напряжениям; $[S]$ — допускаемый запас прочности.

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_\alpha + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}, \quad S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \cdot \tau_\alpha + \psi_\tau \cdot \tau_m}.$$

Здесь σ_{-1} , τ_{-1} — пределы выносливости материала вала при симметричном цикле нормальных и касательных напряжений; σ_α , τ_α — амплитуды

циклов напряжений; σ_m, τ_m — средние значения циклов напряжений; $K_{\sigma D}, K_{\tau D}$ — коэффициенты перехода от пределов выносливости образца к пределам выносливости детали; ψ_σ, ψ_τ — коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла.

Пределы выносливости материала вала при симметричном цикле нормальных и касательных напряжений:

$\sigma_{-1} = 0,43 \cdot \sigma_b$ — для углеродистых сталей,

$\sigma_{-1} = 0,35 \cdot \sigma_b + 100$ — для легированных сталей,

$\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1}$.

Коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла определяются по формулам:

$$\psi_\sigma = 0,02 (1 + 0,01 \sigma_b), \quad \psi_\tau = 0,5 \psi_\sigma.$$

Коэффициенты:

$$K_{\sigma D} = \frac{\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + K_F - 1 \right)}{K_v}, \quad K_{\tau D} = \frac{\left(\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} + K_F - 1 \right)}{K_v},$$

где K_σ, K_τ — эффективные коэффициенты концентрации напряжений (табл. 3.8—3.10); $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$ — коэффициенты влияния размера поперечного сечения вала; K_v — коэффициент влияния упрочнения материала вала (см. табл. 4.12); K_F — коэффициент влияния шероховатости поверхности (см. табл. 4.13).

Таблица 4.8

Коэффициенты K_σ, K_τ для ступенчатого перехода с галтелью (см. рис. 4.39)

t/r	r/d	K_σ при σ_b , МПа				K_τ при σ_b , МПа			
		500	700	900	1200	500	700	900	1200
2	0,01	1,55	1,6	1,65	1,7	1,4	1,4	1,45	1,45
	0,02	1,8	1,9	2,0	2,15	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,03	1,8	1,95	2,05	2,25	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,05	1,85	1,9	2,0	2,2	1,6	1,6	1,65	1,75
3	0,01	1,9	2,0	2,1	2,2	1,55	1,6	1,65	1,75
	0,02	1,95	2,1	2,2	2,4	1,6	1,7	1,75	1,85
	0,03	1,95	2,1	2,25	2,45	1,65	1,75	1,75	1,9
5	0,01	2,1	2,25	2,35	2,5	2,2	2,3	2,4	2,6
	0,02	2,15	2,3	2,45	2,65	2,1	2,15	2,25	2,5

Таблица 4.9

Коэффициенты K_σ , K_τ для шпоночного паза

σ_b , МПа	K_σ	K_τ
500	1,8	1,4
700	2,0	1,7
900	2,2	2,05
1200	2,65	2,4

Таблица 4.10

Коэффициенты K_σ , K_τ для шлицевых и резьбовых участков вала

σ_b , МПа	K_σ		K_τ шлицев		K_τ резьбы
	шлицев	резьбы	прямобоочных	эвольвентных	
500	1,45	1,8	2,25	1,43	1,35
700	1,6	2,2	2,5	1,49	1,7
900	1,7	2,45	2,65	1,55	2,1
1200	1,75	2,9	2,8	1,6	2,35

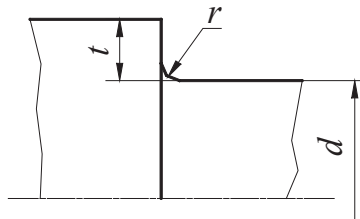


Рис. 4.39

Коэффициент ε_σ для углеродистых сталей при диаметре вала $d > 12$ мм определяется по формуле $\varepsilon_\sigma = \frac{1,68}{d^{0,19}}$. Коэффициенты ε_τ для любых сталей, а также ε_σ для легированных сталей при $d > 12$ мм равны: $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = \frac{1,63}{d^{0,22}}$.

Для оценки концентрации напряжений в местах установки на валу деталей с натягом используют отношения $K_\sigma/\varepsilon_\sigma$ и K_τ/ε_τ . Величина $K_\sigma/\varepsilon_\sigma$ определяется по табл. 4.11, а K_τ/ε_τ по формуле $K_\tau/\varepsilon_\tau = 0,6 K_\sigma/\varepsilon_\sigma + 0,4$.

Если в опасном сечении несколько концентраторов, то при расчете S_σ учитывается только тот, для которого $K_\sigma/\varepsilon_\sigma$ принимает наибольшее значение, при расчете S_τ также рассматривают только наибольшее отношение K_τ/ε_τ .

При вычислении амплитудных и средних значений цикла напряжений принимают, что напряжения изгиба меняются по симметричному циклу, а касательные по наиболее неблагоприятному отнулевому циклу. В этом случае:

$$\sigma_a = \sigma_H = 10^3 M / W_x, \quad \sigma_m = 10^3 F_a / A, \quad \tau_a = \tau_m = 10^3 T / 2W_p,$$

где $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ — суммарный изгибающий момент в опасном сечении, Н·м; T — крутящий момент в опасном сечении, Н·м; F_a — осевая сила в опасном сечении, кН; W_x , W_p — осевой и полярный моменты сопротивления, мм³; A — площадь опасного сечения, мм².

Таблица 4.11

Отношение K_σ/ϵ_σ для посадок с натягом

d вала, мм	K_σ/ϵ_σ при σ_b , МПа			
	500	700	900	1200
30	2,6	3,3	4,0	5,1
40	2,75	3,5	4,3	5,4
50	2,9	3,7	4,5	5,7
60	3,0	3,85	4,7	5,95
70	3,1	4,0	4,85	6,15
80	3,2	4,1	4,95	6,3
90	3,3	4,2	5,1	6,45
100	3,35	4,3	5,2	6,6

При частом реверсе полагают $\tau_a = 10^3 T / W_p$, $\tau_m = 0$.

Значения W_x , W_p для типовых поперечных сечений определяют по формулам:

- для сплошного круглого вала:

$$W_x = \pi d^3 / 32, \quad W_p = \pi d^3 / 16, \quad A = \pi d^2 / 4,$$

- для сечения с одним шпоночным пазом:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} - bt_1,$$

где b — ширина; t_1 — глубина шпоночного паза на валу (см. табл. 4.14).

Таблица 4.12

Коэффициент влияния упрочнения K_y

Вид упрочняющей обработки	Значения K_y при:		
	$K_o < 1,1$	$K_o = 1,1...1,5$	$K_o \geq 1,8$
Закалка ТВЧ	1,3...1,6	1,6...1,7	2,4...2,8
Азотирование	1,15...1,25	1,3...1,9	2,0...3,0
Накатка роликом	1,2...1,4	1,5...1,7	1,8...2,2
Дробеструйный наклеп	1,1...1,3	1,4...1,5	1,6...2,5

Примечание: коэффициент K_y вводится для участков вала с поверхностным упрочнением. При отсутствии поверхностного упрочнения принимают $K_y = 1$.

Таблица 4.13

Коэффициент влияния шероховатости поверхности K_F

Способ обработки поверхности	Параметр шероховатости R_a , мкм	K_F при σ_b , МПа	
		≤ 700	> 700
Шлифование тонкое	До 0,2	1	1
Обтачивание тонкое	0,2...0,8	1,08	1,11
Шлифование чистовое	0,8...1,6	1,15	1,2
Обтачивание чистовое	1,6...3,2	1,25	1,33
Обдирка	3,2...20	1,3	1,5

Таблица 4.14

Размеры шпонок призматических и пазов по ГОСТ 23360–78

d вала, мм	Сечение шпонки мм		Глубина паза, мм		Длина шпонки, мм
	b	h	на валу	в ступице	
Св. 12 до 17	5	5	3	2,3	10...56
Св. 17 до 22	6	6	3,5	2,8	14...70
Св. 22 до 30	8	7	4	3,3	18...90
Св. 30 до 38	10	8	5	3,3	22...110
Св. 30 до 38	12	9	5	3,3	28...140
Св. 30 до 38	14	10	5,5	3,8	36...160
Св. 30 до 38	16	11	6	4,3	45...180

Расчет на статическую прочность производят в целях предупреждения пластических деформаций и разрушений с учетом кратковременных перегрузок. Расчет ведется по наибольшей кратковременной нагрузке, соответствующей наиболее тяжелым условиям работы машины. Если график изменения нагрузки во времени не задан, то наибольшая кратковременная нагрузка определяется по пусковому моменту двига-

теля. В качестве предельного опасного напряжения выбирается предел текучести. Расчет производится по формуле:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}} \geq [S],$$

где $[S]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности ($[S] = 1,2 \dots 1,8$); $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное расчетное напряжение $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 3(\tau_{\text{кр}})^2}$.

Расчет валов на жесткость состоит в определении прогибов и углов поворота, значения которых не должны превышать допускаемые. Прогибы и углы поворота определяются путем интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки; при этом используются методы, изучаемые в курсе «Сопротивление материалов», а для простых схем нагружения — справочные таблицы.

Допускаемая величина $[y]$ прогиба вала под зубчатым колесом с модулем m : $[y] = (0,01 - 0,05)m$.

4.7. Опоры валов

Опорами для валов и вращающихся осей служат подшипники. Они воспринимают радиальные и осевые нагрузки, приложенные к валу, и передают их на корпус или на раму машину.

Все подшипники можно подразделить по виду трения, возникающего в элементах рабочих поверхностей, на подшипники скольжения и подшипники качения; по направлению основной нагрузки, для восприятия которой они предназначены, — на радиальные, радиально-упорные и упорные.

4.7.1. Подшипники скольжения

Форма рабочей поверхности подшипника скольжения, как и форма цапфы вала, может быть цилиндрической, плоской и конической.

Упорные подшипники скольжения, предназначенные для восприятия осевой нагрузки, обычно называют подпятниками. Радиально-

упорные подшипники с конической поверхностью используют только при небольших нагрузках и в тех случаях, когда необходимо систематически устранять зазор от износа подшипника.

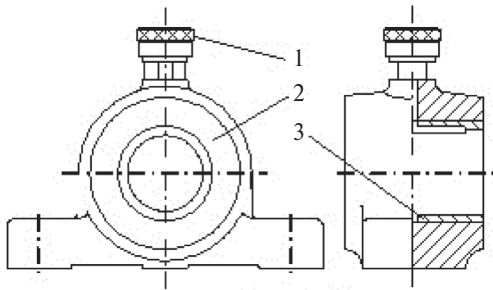


Рис. 4.40

Наибольшее практическое применение получили радиальные подшипники с цилиндрической поверхностью скольжения. Пример простейшего конструктивного исполнения неразъемного радиального подшипника скольжения показан на рис. 4.40. Такой подшипник состоит из корпуса 2, вклады-

ша 3, выполненного в виде втулки, и приспособления для подачи смазки 1. Сверху через корпус и вкладыш проходит отверстие для подачи смазки, которая распределяется по длине вкладыша с помощью продольной смазочной канавки.

К недостаткам неразъемных подшипников относятся неудобство монтажа и демонтажа их в узлах машин, а также невозможность устранения повышенных зазоров после износа вкладышей. Этих недостатков нет в разъемных подшипниках. Разъем вкладыша делается по его диаметру, а разъем корпуса выполняется ступенчатым с использованием уступа для предохранения от сдвига крышки относительно корпуса.

Корпус и крышка изготавливаются из чугуна или стали, а вкладыш из антифрикционных материалов: бронзы, баббита, алюминиевых сплавов, антифрикционного чугуна, пластмасс и других материалов. Вкладыши бывают цельными и биметаллическими с антифрикционным слоем материала толщиной 0,1...5 мм, нанесенного на стальной или чугунный вкладыш. Для смазки подшипников применяются индивидуальная и централизованная смазочные системы. В зависимости от смазочных устройств смазка может подаваться периодически или непрерывно, под давлением и без него.

Индивидуальная периодическая смазка применяется в механизмах с небольшой нагрузкой и с малой скоростью вращения, централизованная непрерывная смазка — в машинах, работающих непрерывно или с малыми перерывами при больших и средних скоростях вращения.

Нормальная работа подшипников скольжения может быть достигнута только при подаче смазки к трущимся поверхностям со стороны наименьшего давления в слое смазки.

Каналы и канавки, служащие для подвода и распределения смазки, должны размещаться со стороны разгруженной части скользящих поверхностей. Канавки, расположенные поперек направления движения, должны заканчиваться внутри вкладыша, не выходя наружу. Переход канавки к рабочей поверхности вкладыша должен быть выполнен плавно.

Область применения подшипников скольжения в современном машиностроении значительно сократилась в связи с широким распространением подшипников качения. Однако для некоторых видов опор преимущественно применяются подшипники скольжения. Так, например, для высокоскоростных опор (до десятков тысяч оборотов в минуту); для тяжелонагруженных крупных валов, к которым не подходят стандартные подшипники качения; для опор, подверженных интенсивным вибрационным и ударным нагрузкам или работающих в воде и агрессивных средах; для опор, нуждающихся по условиям сборки в разъеме по диаметру.

К недостаткам подшипников скольжения относятся:

- сравнительно большой коэффициент трения, особенно при неустановившемся движении и в периоды пуска и остановки машины;
- сложность системы смазки и большой расход смазки;
- сравнительно большие размеры в осевом направлении;
- необходимость применения цветных металлов для изготовления вкладышей.

Расчет подшипников скольжения, работающих в режиме граничного или полужидкого трения, выполняется обычно как проверочный, так как диаметр цапфы d определяется не расчетом, а выбирается конструктивно в соответствии с диаметром соседнего участка вала и с учетом необходимых буртиков и галтелей. Длина цапфы l принимается равной $(0,4...1,2)d$.

Выбор расчетных критериев обусловлен следующими факторами. Прочность трущейся поверхности вкладыша при статической нагрузке зависит от величины удельного давления. Логично было бы исходить из максимального его значения, но для этого необходимо учитывать фактическую зону контакта цапфы и подшипника, жесткость

деталей сопряженной пары, закон распределения нагрузки по длине и ширине контактной поверхности; принимая во внимание, что в действительности нагрузка не статическая, а переменная во времени и т.д. Из-за большой сложности такой задачи в качестве критерия прочности было принято среднее удельное давление, определяемое зависимостью (4.72).

После выбора размеров d и l подшипник проверяют по следующим двум критериям:

$$q = \frac{P}{d\ell} \leq [q]; \quad (4.73)$$

$$q \cdot V \leq [q \cdot V], \quad (4.74)$$

где q — среднее удельное давление, МПа; P — радиальная нагрузка на подшипник, Н; V — скорость скольжения на поверхности цапфы, м/с; $[q]$ и $[q \cdot V]$ — допускаемые значения среднего удельного давления и произведения $q \cdot V$ соответственно.

Второй критерий, проверяемый по условию (4.73), связан с прочностью адсорбированной пленки и условиями сохранения смазывающей способности масел. Эти свойства в основном определяются температурой рабочей зоны подшипника, устанавливающейся в зависимости от количества выделяемого и отводимого тепла. Количество тепла (ккал/с), выделяемое в зоне трущихся поверхностей подшипника, определяется зависимостью:

$$Q = P \cdot f \cdot V / K,$$

где K — постоянный коэффициент, f — коэффициент трения между цапфой вала и вкладышем.

Принимая во внимание, что $P = q \cdot l \cdot d$, получим:

$$Q = \frac{\ell \cdot f \cdot d}{K} q V.$$

Из этой формулы видно, что при постоянном значении коэффициента трения f тепловыделение на единицу поверхности подшипни-

ка можно приближенно выразить произведением $q \cdot V$, которое и принимается в качестве условного критерия.

Допускаемые значения $[q]$ и $[q \cdot V]$ в проверочных расчетах подшипников необходимо использовать как средние статистические данные, относящиеся к подобным конструкциям.

Например, для латунных и бронзовых вкладышей подшипников редукторов принимают $[q] = (12...15)$ МПа, $[q \cdot V] = (10...15)$ МПа·м/с.

Далее производится выбор смазки и величины радиального зазора в подшипнике из условия обеспечения жидкостного трения.

Подшипники, работающие в режиме граничного или полужидкостного трения, наиболее типичны для подшипниковых узлов машин общего назначения.

4.7.2. Подшипники качения

Подшипники качения в большинстве случаев состоят из наружного и внутреннего колец с дорожками качения, тел качения (шариков или роликов) и сепаратора, разделяющего и направляющего тел качения (см. рис. 4.41).

Достоинства подшипников качения по сравнению с подшипниками скольжения:

- меньший момент сил трения;
- меньшие пусковые моменты;
- меньший нагрев;
- незначительный расход смазки;
- простота обслуживания.

Недостатки подшипников качения:

- меньшая долговечность при больших угловых скоростях и нагрузках;
- ограниченная способность воспринимать ударные и динамические нагрузки;
- большие габариты по диаметру, особенно при больших радиальных нагрузках;
- отсутствие осевого разъема, что ограничивает применение и усложняет монтаж.

На рис. 4.41 изображены основные типы подшипников качения.

В соответствии с формой тел качения различают шариковые и роликовые подшипники.

По направлению воспринимаемой нагрузки относительно оси вала подшипники подразделяются на радиальные, радиально-упорные и упорные.

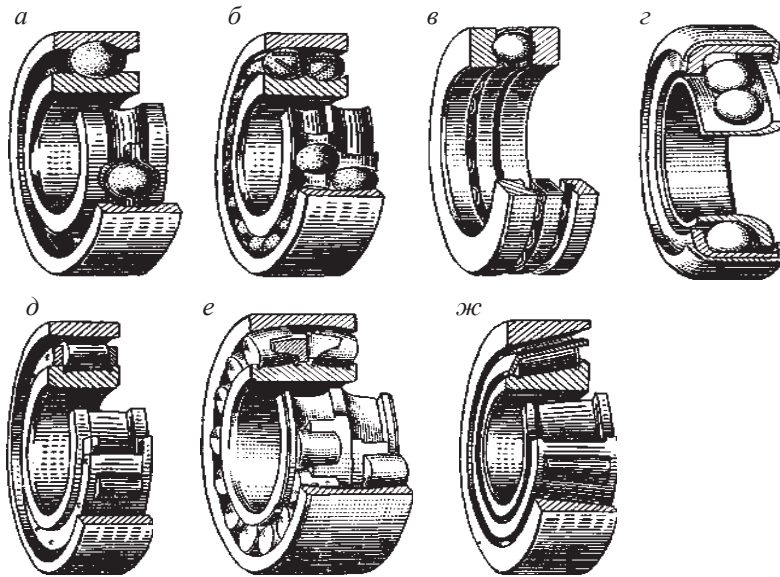


Рис. 4.41

Радиальные шариковые подшипники (рис. 4.41, *а*) наиболее дешевые. Они допускают небольшие перекосы вала (до $0,25^\circ$) и могут воспринимать осевые нагрузки меньше радиальных.

Радиальные роликовые подшипники (рис. 4.41, *д*) допускают значительно большие нагрузки, чем шариковые. Однако они дороже, не способны воспринимать осевые силы и плохо работают при перекосах валов.

Самоустанавливающиеся подшипники (рис. 4.41, *б, е*) допускают значительный перекося валов (до 3°). Эти подшипники допускают незначительную осевую нагрузку. На рис. 4.41 показаны радиально упорные шариковые (рис. 4.41, *з*) и роликовые (рис. 4.41, *ж*) подшипники.

Применение игольчатых подшипников позволяет уменьшить наружный диаметр при значительных воспринимаемых нагрузках. Упорный подшипник (рис. 4.41, *в*) воспринимает только осевую силу и плохо работает при перекосах валов.

По числу рядов тел качения подшипники делятся на однорядные, двух- и четырехрядные.

Соотношение габаритных размеров подшипников определяют их серию. По радиальным габаритам различают семь серий: сверхлегкие — две серии; особо легкие — две серии; легкие, средние и тяжелые. По ширине различают четыре серии — узкие, нормальные, широкие и особо широкие.

Преимущественное распространение имеют подшипники легкой и средней серий нормальной ширины.

Все подшипники имеют условное обозначение, характеризующее внутренний диаметр подшипника, его серию, тип, конструктивные особенности и класс точности. Эти параметры обозначаются цифрами.

Класс точности указывается цифрой, отделенной через тире от основного обозначения слева. Нормальный класс точности не обозначается. Приняты следующие обозначения классов точности: 0 — нормальный; 6 — повышенный; 5 — высокий; 4 — особо высокий; 2 — сверхвысокий.

Внутренний диаметр подшипника (посадочный диаметр на вал) указывается двумя первыми цифрами справа. Эти цифры соответствуют внутреннему диаметру, деленному на пять.

Серия подшипника указывается на его маркировке третьей и седьмой цифрами справа. Третья цифра справа обозначает серию по радиальным габаритам: особо легкая — 1; легкая — 2; средняя — 3 и тяжелая — 4.

Тип подшипника проставляется в условном обозначении четвертой цифрой справа:

- 0 — шариковый радиальный;
- 1 — шариковый радиальный сферический двухрядный;
- 2 — роликовый радиальный с короткими роликами;
- 3 — роликовый радиальный сферический двухрядный;
- 4 — роликовый игольчатый;
- 5 — роликовый с витыми роликами;
- 6 — шариковый радиально-упорный;
- 7 — роликовый радиально-упорный (конический);
- 8 — шариковый упорный;
- 9 — роликовый упорный.

Конструктивные особенности обозначаются на маркировке пятой и шестой цифрами. Нули, стоящие левее последней значащей цифры, опускаются.

Причиной выхода подшипников из строя является:

- усталостное выкрашивание рабочих поверхностей, вызванное возникновением в них переменных напряжений;
- образование вмятин на беговых дорожках колец, возникающих под действием больших статических нагрузок в тихоходных подшипниках;
- абразивный износ колец и тел качения;
- раскалывание тел качения из-за ударных и вибрационных нагрузок, а также неправильного монтажа, вызывающего перекос колец;
- заклинивание тел качения при перегреве и отсутствии смазки;
- разрушение сепараторов, вызванное центробежными силами со стороны тел качения.

Усталостное выкрашивание является основной причиной выхода из строя подшипников качения после длительной работы в нормальных условиях.

Предварительный выбор подшипников производят по диаметру вала в месте посадки на него подшипника. Для тихоходных валов выбирают подшипники легкой серии, для быстроходных валов — подшипники средней серии.

После выбора подшипника проверяют его работоспособность. Основными критериями работоспособности подшипника качения являются его долговечность и статическая грузоподъемность. При расчете подшипника на долговечность учитывают его базовую динамическую грузоподъемность.

Базовая динамическая грузоподъемность C — это такая постоянная нагрузка, которую выдерживают не менее 90 % подвергнутых испытанию подшипников без появления признаков усталости в течение 1 млн оборотов. Для радиальных и радиально-упорных подшипников нагрузка является радиальной, для упорных подшипников нагрузка является осевой.

Базовая статическая грузоподъемность C_0 — это такая постоянная нагрузка, которая соответствует максимальным расчетным контактными напряжениями между телом качения и дорожкой качения подшипника, равным:

4200 МПа — для всех типов шариковых подшипников, кроме самоустанавливающихся подшипников;

4600 МПа — для радиальных шариковых самоустанавливающихся подшипников;

4000 МПа — для всех типов роликовых подшипников.

Возникающая при этих контактных напряжениях общая остаточная деформация колец и тел качения в наиболее нагруженной зоне контакта приблизительно равна 0,0001 диаметра тела качения.

Значения C и C_0 для каждого подшипника приведены в каталогах.

Расчет по динамической грузоподъемности выполняют при частоте вращения кольца подшипника $n > 1 \text{ мин}^{-1}$, расчет по статической грузоподъемности — при $n \leq 1 \text{ мин}^{-1}$. Если $n = 1 \dots 10 \text{ мин}^{-1}$, то в расчете следует принять $n = 10 \text{ мин}^{-1}$.

Расчет подшипников качения на долговечность

Зависимость между номинальной долговечностью L , выраженной в миллионах оборотов, эквивалентной динамической нагрузкой P , и динамической грузоподъемностью \tilde{N} представлена формулой:

$$L = \left(\frac{C}{P_{\text{э}}} \right)^m,$$

где $m = 3$ для шарикоподшипников и $m = 10/3$ для роликоподшипников.

Если частота вращения подшипника постоянна, то долговечность (базовый расчетный ресурс) удобнее выражать в часах работы L_h

$$L_h = \frac{10^6}{60n} \left(\frac{C}{P_{\text{э}}} \right)^m,$$

где n — частота вращения подшипника, об/мин. Эта формула справедлива при выполнении условия $P_{\text{э}} \leq 0,5C$.

Согласно ГОСТ 16162–85, для подшипников зубчатых редукторов должно выполняться условие $L_h = 12\,500 \text{ ч}$, для подшипников червячных редукторов $L_h \geq 5\,000 \text{ ч}$. Если эти условия не выполняются, то либо переходят к подшипнику более тяжелой серии, либо увеличивают диаметр участка вала под подшипник, либо меняют тип подшипника.

Эквивалентная динамическая нагрузка для радиальных и радиально-упорных подшипников — это постоянная радиальная нагрузка, которая

при приложении ее к подшипнику с вращающимся внутренним и неподвижным наружным кольцами обеспечивает такую же долговечность, какую подшипник имеет при действительных условиях нагружения.

При определении эквивалентной динамической нагрузки учитывают тип подшипника, величину радиальной и осевой нагрузок, характер действия этих нагрузок, температуру подшипника и вращающееся кольцо.

Для радиальных и радиально-упорных подшипников

$$P_{\Sigma} = (VXF_r + YF_a)k_{\sigma}k_T.$$

Для упорных подшипников:

$$P_{\Sigma} = F_a k_{\sigma} k_T,$$

где F_r — постоянная по величине и направлению радиальная нагрузка на подшипник; F_a — постоянная по величине и направлению осевая нагрузка на подшипник; V — коэффициент вращения кольца (при вращающемся внутреннем кольце $V = 1$, при наружном — $V = 1,2$); k_{σ} — коэффициент безопасности (см. табл. 4.14); k_T — температурный коэффициент: $k_T = 1$ при $t \leq 100$ °C; $k_T = (108 + 0,4t)/150$ при $t = 105 \dots 250$ °C; X и Y — коэффициенты нагрузки, зависящие от типа подшипника и характера его нагружения.

Для радиальных подшипников с короткими цилиндрическими роликами принимают $X = 1$, $Y = 0$. Для упорных подшипников — $X = 0$, $Y = 1$. Для шариковых радиальных и радиально-упорных подшипников коэффициенты нагрузки X и Y определяют в зависимости от отношения F_a/VF_r и параметра осевого нагружения e (см. табл. 4.16). Если $F_a/VF_r \leq e$, то осевая нагрузка не оказывает влияния на долговечность подшипника, из-за чего коэффициенты нагрузок принимают $X = 1$, $Y = 0$. При $F_a/VF_r > e$ коэффициент X определяют по табл. 4.16, коэффициент Y по формуле: $Y = (1 - X)/e$.

При установке вала на радиально-упорных подшипниках осевые силы F_a , нагружающие подшипники, находят с учетом осевых составляющих F_s от действия радиальной нагрузки F_r .

Для шариковых радиально-упорных с углом контакта $\alpha \leq 18^\circ$ $F_s = eF_r$; для конических роликовых $F_s = 0,83eF_r$.

Таблица 4.15

Значение коэффициента K_6

Вид нагрузки	K_6	Области применения
Спокойная нагрузка без толчков.	1.0	Кинематические и ручные приводы, передачи трением.
Легкие толчки, кратковременные перегрузки до 125 % от номинальной нагрузки.	...1.2	Зубчатые передачи 6-й степени точности, металлорежущие станки (кроме строгальных и долбежных), электродвигатели малой и средней мощности.
Умеренные толчки, вибрации, кратковременные перегрузки до 150 % от номинальной нагрузки.	1.3...1.5	Зубчатые передачи 7-й и 8-й степеней точности, редукторы всех конструкций, крановые механизмы.
То же, в условиях повышенной надежности.	1.5...1.8	Центрифуги, мощные электродвигатели, строгальные и долбежные станки.
Нагрузки со значительными толчками и вибрацией, кратковременные перегрузки до 200 % от номинальной нагрузки.	1.8...2.5	Зубчатые передачи 9-й степени точности, дробилки, копры, кривошипно-шатунные механизмы.

Таблица 4.16

Параметр осевого нагружения и коэффициент X

Тип подшипника	Обозначение	e	X
Шариковый радиальный однорядный	0000	$e = 0,518 \left(\frac{F_a}{C_0} \right)^{0,24} \geq 0,19$	0,56
Шариковый радиально-упорный однорядный	36000	$e = 0,574 \left(\frac{F_t}{C_0} \right)^{0,215} \geq 0,3$	0,46
Роликовый конический	7000	Табл. П. 17	0,4

Определить осевые силы, действующие на радиально-упорные подшипники, можно по следующим формулам в соответствии с приведенной схемой (см. рис. 4.42).

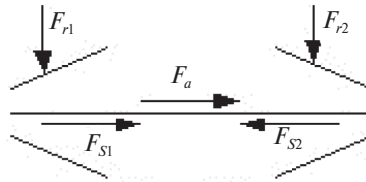


Рис. 4.42

Формулы для определения осевых сил в радиально-упорных подшипниках

Условия нагружения	Осевые нагрузки
$F_{S1} \geq F_{S2}; F_a > 0$	$F_{a1} = F_{S1}$
$F_{S1} \geq F_{S2}; F_a > F_{S2} - F_{S1}$	$F_{a2} = F_{S1} + F_a$
$F_{S1} < F_{S2}; F_a < F_{S2} - F_{S1}$	$F_{a1} = F_{S2} - F_a$
	$F_{a2} = F_{S2}$

При частоте вращения $n \leq 1$ об/мин расчет ведется по статической грузоподъемности C_0 — нагрузки, от которой возникает остаточная деформация тел качения и кольца в наиболее нагруженной точке контакта, не превышающая 0,0001 диаметра тела качения:

$$P_0 < C_0,$$

где P_0 — эквивалентная статическая нагрузка.

В качестве эквивалентной статической нагрузки для радиальных и радиально-упорных подшипников выбирается большая из двух величин:

$$P_0 = F_r \text{ и } P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a,$$

где X_0 и Y_0 — коэффициенты статической радиальной и осевой нагрузок, приведены в справочниках.

4.8. Соединения деталей машин

Детали, образующие машину, связаны между собой. Эти связи можно разделить на подвижные и неподвижные. Подвижные связи образованы шарнирами, подшипниками, зацеплениями. Неподвижные связи в технике называются *соединениями*.

По признаку разбираемости все соединения делятся на разъемные и неразъемные.

Разъемные соединения позволяют разъединять детали без их повреждения. К ним относятся резьбовые, шлицевые, шпоночные и др. соединения.

Неразъемные соединения не позволяют разъединять детали без их повреждения. К ним относятся заклепочные, сварные и соединения с натягом (прессовые).

Соединения являются важными элементами конструкций. Многие поломки и аварии при работе машин обусловлены неудовлетворительным качеством соединений. При проектировании соединений необходимо стремиться к **равнопрочности соединения с соединяемыми деталями**. Желательно, чтобы соединение не искажало форму изделия.

4.8.1. Резьбовые соединения

Резьбовыми называют разъемные соединения, выполненные с помощью резьбовых крепежных деталей — винтов, болтов, шпилек, гаек или резьбы, нанесенной непосредственно на соединяемые детали.

Расчетные зависимости, приведенные далее, применимы к любой детали с винтовой резьбой, которую в дальнейшем будем условно именовать болтом.

Для стандартных крепежных изделий наиболее широко применяются стали марок Ст3, Сталь 10 и Сталь 20. Для повышенных нагрузок — Сталь 35 и Сталь 45. Для стержня болта, винта или шпильки допускаемое напряжение на растяжение:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_T}{[S]},$$

где σ_T — предел текучести материала болта; $[S]$ — коэффициент безопасности, принимаемый в зависимости от ответственности соединения от 1,5 до 3,0.

При контролируемой затяжке динамометрическим ключом $[S] = 1,6-2$.

Механические свойства материалов указываются в обозначении крепежных деталей в виде двух чисел, разделенных точкой. Первое чис-

ло, умноженное на 100, даст минимальное значение предела прочности σ_A (МПа); второе, деленное на 10, соответствует отношению σ_0/σ_A , следовательно, произведение обоих чисел даст предел текучести σ_0 , деленный на 10. Пример обозначения класса точности: 5.6, что соответствует $\sigma_A = 500$ МПа; $\sigma_0 = 5 \cdot 6 \cdot 10 = 300$ МПа.

В зависимости от условий сборки и нагружения различают ненапряженные и напряженные резьбовые соединения.

Напряженными называются такие соединения, в которых отсутствует напряжение в деталях соединения до приложения внешней нагрузки, т. е. это соединения без предварительной затяжки. В напряженном резьбовом соединении детали используют напряжения от усилия затяжки до приложения внешней нагрузки. При равнопрочности резьбы и элементов стандартных крепежных деталей расчет резьбового соединения сводится к определению диаметра резьбы либо напряжения в стержне болта.

Расчет ненапряженного болтового соединения

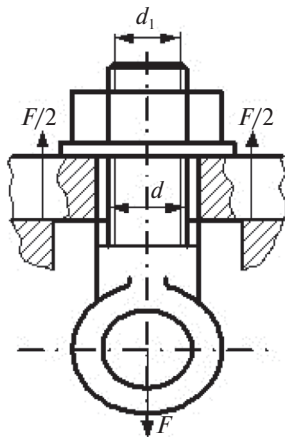


Рис. 4.43

Резьбовые соединения предназначены главным образом для восприятия осевых нагрузок. Расчет ненапряженного резьбового соединения с осевой постоянной нагрузкой является основным (рис. 4.43). Путем выбора соответствующих значений расчетной нагрузки к нему сводится большинство других видов расчетов.

Характерным примером ненапряженного соединения может служить резьбовой конец грузового крюка грузоподъемной машины.

Условие прочности болта:

$$\sigma_p = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d_1^2} \leq [\sigma]_p,$$

где F — сила, растягивающая болт; d_1 — внутренний диаметр резьбы; $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение на растяжение; σ_p — расчетное напряжение в поперечном сечении болта.

Из формулы для проверочного расчета вытекает зависимость для проектного расчета болта:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma]_p}}.$$

Резьбовое соединение, нагруженное усилием затяжки

Стержень болта растягивается усилием затяжки F_3 и скручивается моментом M_T , приложенным к гайке, равным сумме моментов, затраченных на преодоление сил трения в резьбе и в плоскости касания гайки с соединяемыми деталями (рис. 4.44).

Нормальное напряжение от осевого усилия затяжки:

$$\sigma_p = \frac{4F_3}{\pi d_1^2}.$$

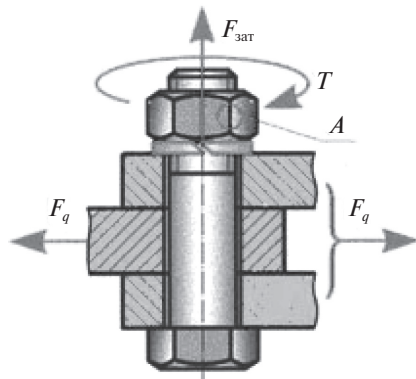


Рис. 4.44

Касательные напряжения от скручивающего момента

$$\tau = \frac{M_T}{W_p} = \frac{M_T}{0,2d^3}.$$

Эквивалентное напряжение в теле болта определяется в соответствии с третьей гипотезой прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau^2}.$$

Расчеты показали, что для напряженных соединений со стандартными крепежными резьбами эквивалентное напряжение в теле болта равно:

$$\sigma_{\text{экв}} = 1,3\sigma_p.$$

Следовательно, напряженное резьбовое соединение можно рассчитывать только на растяжение по допускаемому напряжению на растяжение, уменьшенному в 1,3 раза, или по расчетной силе, увеличенной по сравнению с растягивающей болт силой в 1,3 раза.

Проектный расчет болта в этом случае проводится по формуле

$$d_1 = \sqrt{\frac{1,3 \cdot 4F_3}{\pi[\sigma]_p}}.$$

Резьбовое соединение с внецентренной нагрузкой на болт

На рис 4.45 представлена схема резьбового соединения с болтом, имеющим эксцентричную головку. Соединение нагружено осевым усилием затяжки F_3 для обеспечения герметичности сосуда, находящегося под давлением газа или жидкости. Болт в этом случае испытывает деформации растяжения и изгиба, суммарное напряжение от которых равно:

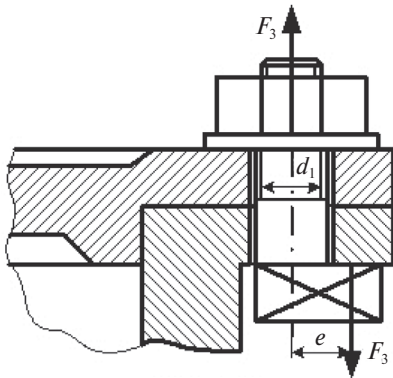


Рис. 4.45

$$\sigma_{\max} = \sigma_p + \sigma_E;$$

$$\sigma_p = \frac{4F_3}{\pi d_1^2};$$

$$\sigma_E = \frac{I_E}{W_E} = \frac{F_3 \cdot e}{\pi \frac{d_1^3}{32}},$$

где σ_p — нормальное напряжение от растяжения осевой силой F_3 ; σ_E — нормальное напряжение от изгиба на поверхности стержня болта; d_1 — внутренний диаметр резьбы; e — эксцентриситет нагрузки:

$$\sigma_{\max} = \frac{4F_3}{\pi d_1^3} \left(1 + \frac{8e}{d_1} \right) \leq [\sigma]_p.$$

Последняя формула выражает условие прочности резьбового соединения с внецентренной (эксцентричной) нагрузкой. При $e = 0,5d_1$ $\sigma_{\max} = 5\sigma_p$. Суммарное напряжение в болте возрастает с увеличением

эксцентриситета приложения нагрузки, поэтому при конструировании следует избегать применения болтов с несимметричным приложением нагрузки. Эксцентричная нагрузка может действовать и на болт с симметричной головкой, если опорные поверхности под головкой или гайкой будут иметь перекося или выступы. Чтобы избежать изгиба болтов опорные поверхности корпусов под болты всегда обрабатывают, выполняя планировку.

Резьбовые соединения, нагруженные поперечной силой

При установке болта с зазором (рис. 4.46) условием надежности соединения является отсутствие относительного сдвига сопряженных деталей в стыке. Это достигается созданием такой величины усилия предварительной затяжки болта F_3 , которая обеспечивает уравнивание внешней поперечной нагрузки Q силами трения в стыке F_o .

Из условия равновесия одной из соединяемых деталей следует:

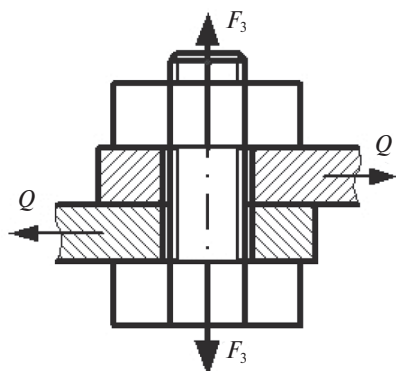


Рис. 4.46

$$F_{o6} > Q \text{ или } F_{o6} = kQ,$$

где k — коэффициент запаса, принимаемый равным 1,2...2.

Силу трения определим как произведение нормального давления между сопрягаемыми деталями, равное усилию предварительной затяжки на коэффициент трения скольжения в стыке f :

$$F_{тр} = F_3 f, \text{ откуда } F_3 = kQ/f.$$

Прочность болта оценивается по формуле для напряженного резьбового соединения с учетом выражения для усилия предварительной затяжки

$$\sigma_p = \frac{1,3 \cdot 4kQ}{\pi d_1^2 f} \leq [\sigma]_p.$$

По этой формуле определяем расчетный внутренний диаметр резьбы, по которому выбираем болт со стандартной резьбой.

4.8.2. Сварные соединения

К сварным соединениям относятся неразъемные соединения, основанные на использовании сил молекулярного сцепления и получаемые путем местного нагрева соединяемых деталей. Затвердевший после сварки металл, соединяющий свариваемые изделия, называется сварным швом.

В зависимости от расположения соединяемых частей различают следующие виды сварных соединений: стыковые (рис. 4.47, а), внахлестку (рис. 4.47, б), с накладками (рис. 4.47, в), угловые (рис. 4.47, г) и тавровые (рис. 4.47, д). На рис. 4.47 сварной шов условно затушеван.

Сварные швы стыковых соединений называются стыковыми.

Сварные швы соединений внахлестку, с накладками, угловых и тавровых называются угловыми.

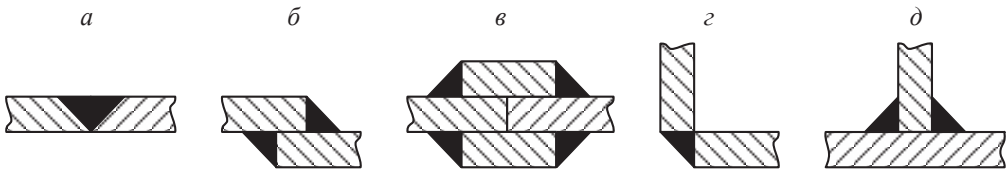


Рис. 4.47

Основным требованием при проектировании сварных конструкций является обеспечение равнопрочности шва и соединяемых им деталей.

Если сварные соединения осуществляются несколькими сварными швами, то эти швы необходимо располагать так, чтобы они были нагружены возможно равномерно.

Для угловых швов размер катета шва выбирают в соответствии с толщинами соединяемых деталей, часто равным меньшей из них, а требуемую длину шва определяют из расчета на прочность.

Стыковые швы рассчитывают на прочность по нормальным напряжениям, при этом наплыв металла не учитывают (см. рис. 4.48).

$$\sigma'_p = \frac{F}{A} = \frac{F}{b\delta} \leq [\sigma_p]',$$

где σ'_p — расчетное напряжение в сварном шве; $[\sigma_p]'$ — допускаемое напряжение для шва.

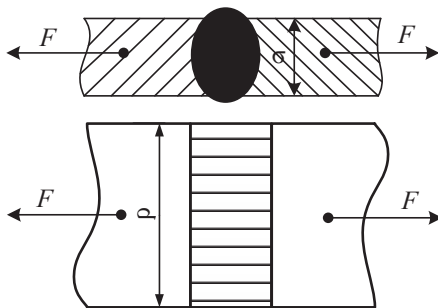


Рис. 4.48

При действии на стыковой шов момента в плоскости, перпендикулярной к плоскости стыка (рис. 4.50), расчет производится по формуле

$$\sigma = \frac{M}{W_E} = \frac{6M}{b^2 \delta} \leq [\sigma],$$

где W_E — момент сопротивления расчетного сечения шва в изгибе.

Если стыковой шов находится под действием момента M и растягивающей силы F (рис. 4.49), то условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma' = \frac{F}{b\delta} + \frac{6M}{b^2 \delta} \leq [\sigma_p]',$$

т. е. полное напряжение определяется суммой напряжений от растяжения и изгиба.

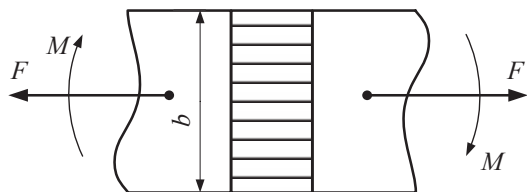


Рис. 4.49

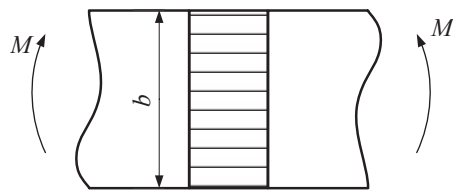


Рис. 4.50

Угловые швы рассчитываются на срез по наименьшему сечению, расположенному в биссекторной плоскости прямого угла поперечного сечения шва. Рассмотрим соединение, выполненное при помощи лобового длиной l_2 и двух фланговых швов длиной l_1 (рис. 4.51). В расчетном сечении толщину углового шва h принимают:

$$h = k \cdot \cos 45^\circ = 0,7k,$$

где k — катет поперечного сечения углового шва.

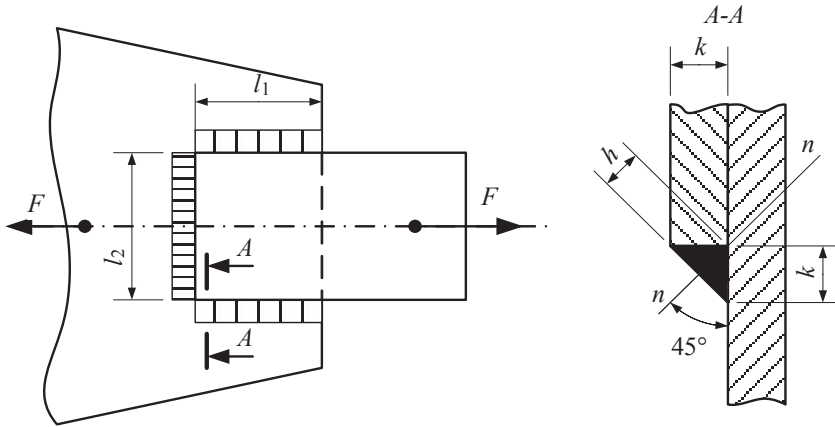


Рис. 4.51

Условие прочности сварного шва F можно выразить через расчетное усилие F и геометрические размеры угловых швов:

$$\tau'_{\text{ср}} = F/[h(2l_1 + l_2)] \leq [\tau'_{\text{ср}}] \text{ или } \tau'_{\text{ср}} = F/[0,7k(2l_1 + l_2)] \leq [\tau'_{\text{ср}}],$$

где $\tau'_{\text{ср}}$ — напряжение среза в шве; $[\tau'_{\text{ср}}]$ — допускаемое напряжение среза в шве.

Длину углового лобового шва обычно принимают равной ширине привариваемой детали. Длину углового флангового шва определяют расчетом на прочность. Суммарная длина швов равна:

$$2l_1 + l_2 = \frac{F}{0,7k[\tau'_{\text{ср}}]}.$$

Допускаемые напряжения для стыковых и угловых швов определяются в зависимости от допускаемого напряжения на растяжение для материала свариваемых деталей $[\sigma_p]$, вида сварки (ручная, автоматическая, полуавтоматическая) и типа электрода.

Для автоматической сварки и ручной сварки электродами Э42 А и Э50 А:

$$[\sigma_p]' = [\sigma_p],$$

где $[\sigma_p]$ — допускаемое напряжение растяжения основного материала.

При ручной дуговой сварке электродом Э34:

$$[\sigma_p]' = 0,8 [\sigma_p]; [\tau_{пд}]' = 0,5 [\sigma_p].$$

При ручной дуговой сварке электродами Э42 и Э50:

$$[\sigma_p]' = 0,9 [\sigma_p]; [\tau_{пд}]' = 0,6 [\sigma_p].$$

При знакопеременной нагрузке допускаемые напряжения для стыковых $[\sigma_p]'$ и угловых $[\tau_{пд}]'$ швов уменьшаются в γ раз, где коэффициент γ равен:

$$\text{для стыковых швов } \gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \frac{F_{\min}}{F_{\max}}}, \text{ для угловых швов } \gamma = \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \frac{F_{\min}}{F_{\max}}}.$$

4.8.3. Шпоночные соединения

Шпонка — деталь, устанавливаемая в пазах двух соприкасающихся деталей и препятствующая относительно повороту или сдвигу этих деталей. Шпонки преимущественно применяют для передачи крутящего момента от вала к ступице зубчатых колес, шкивов и т. д. или, наоборот, — от ступицы к валу.

Шпоночные соединения могут быть разделены на две группы: а) ненапряженные, осуществляемые с помощью призматических и сегментных шпонок; б) напряженные — с помощью клиновых шпонок. Наибольшее применение имеют ненапряженные соединения призматическими шпонками с двумя скругленными концами, в которых для лучшего центрирования ступицы устанавливают на валы с натягом. Шпонки стандартизованы.

Размеры призматических шпонок $b \times h$ выбирают по ГОСТ 23360—78 в зависимости от диаметра вала (см. табл. 4.17). Длину шпонки l принимают на 5—10 мм меньше ступицы.

Рабочими гранями призматической шпонки являются боковые поверхности (рис. 4.52). Для упрощения и облегчения сборки шпоночных соединений между шпонкой и ступицей предусматривается радиальный зазор по высоте шпонки.

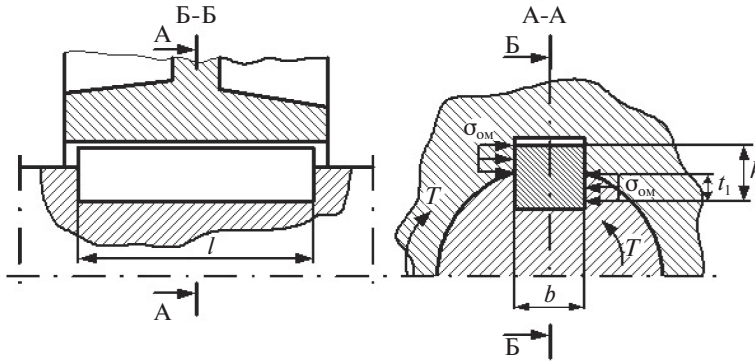


Рис. 4.52

Прочность шпонки оценивается по напряжениям смятия σ_{ni} на рабочих гранях. Эти напряжения находят из уравнения равновесия ступицы (либо вала), полагая, что напряжения в зоне контакта распределены равномерно и плечо главного вектора напряжений равно $0,5d$, где d — диаметр вала.

Таблица 4.17

d вала, мм	Сечение шпонки, мм		t_1 , мм
	b	h	
Св. 12 до 17	5	5	3
Св. 17 до 22	6	6	3.5
Св. 22 до 30	8	7	4
Св. 30 до 38	10	8	5
Св. 38 до 44	12	8	5
Св. 44 до 50	14	9	5.5
Св. 50 до 58	16	10	6
Св. 58 до 65	18	11	7
Св. 65 до 75	20	12	7.5
Св. 75 до 85	22	14	9
Св. 85 до 95	25	14	9
Св. 95 до 110	28	16	10
Св. 110 до 130	32	18	11
Св. 130 до 150	36	20	12
Св. 150 до 170	40	22	13

Размеры шпонок призматических и пазов на валах выбирают по ГОСТ 23360–78

В этом случае условие прочности призматической шпонки на смятие можно выразить формулой:

$$\sigma_{ni} = \frac{F}{A_p} = \frac{2T}{d l_p (h - t_1)} \leq [\sigma_{ni}],$$

где σ_{ni} — расчетное напряжение смятия; $[\sigma_{ni}]$ — допускаемое напряжение смятия; F — окружное усилие на валу; T — крутящий момент, передаваемый соединением; t_1 — глубина паза вала; l_p — рабочая длина шпонки, $l_p = l - b$.

Проверку прочности шпонки на срез обычно не производят, так как это условие удовлетворяется при использовании стандартных сечений.

Допускаемые напряжения смятия в неподвижных шпоночных соединениях при спокойной нагрузке рекомендуется принимать: при стальной ступице $[\sigma_{ni}] = 100 \dots 150$ МПа, при чугунной — $[\sigma_{ni}] = 60 \dots 80$ МПа. При работе со слабыми толчками эти значения уменьшают на одну треть, при ударной нагрузке — на две трети. При частном реверсировании допускаемые напряжения уменьшают в два раза.

4.8.4. Муфты

Муфтами называются устройства, предназначенные для соединения концов валов или валов со свободно установленными на них деталями (зубчатыми колесами, шкивами и т. д.). Основным назначением муфт является передача крутящего момента. Кроме того, муфты могут выполнять следующие функции:

- компенсировать неточности изготовления и сборки валов;
- предохранять элементы машин от перегрузок;
- обеспечивать сцепление и расцепление деталей.

По назначению выделяют три основных класса муфт.

Нерасцепляемые (постоянные) обеспечивают постоянное соединение валов между собой (жесткие, компенсирующие, упругие).

Управляемые позволяют сцеплять и расцеплять валы как на ходу, так и во время остановки (кулачковые, фрикционные).

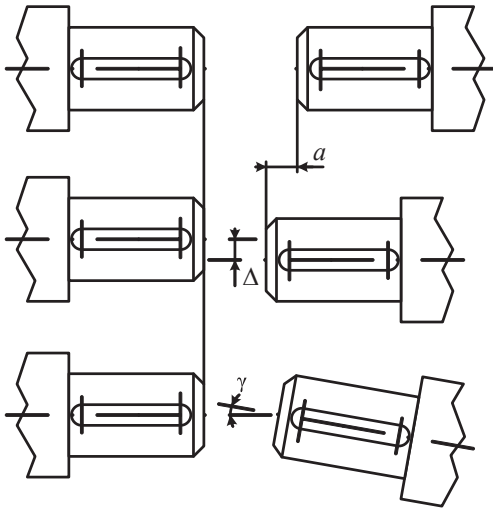


Рис. 4.53

Самоуправляемые автоматически срабатывают при изменении режима работы машины (обгонные, центробежные, предохранительные).

Вследствие погрешностей изготовления и монтажа валов всегда имеются отклонения от номинального расположения осей валов. Различают три вида отклонений: a — осевое смещение, Δ — радиальное смещение и γ — угловое смещение (рис. 4.53).

Для компенсации этих отклонений используют компенсирующие и упругие муфты.

Большинство муфт стандартизовано. Основным параметром муфты является номинальный крутящий момент T_H . При выборе стандартной муфты должно выполняться условие:

$$T_H \geq T_p = k \cdot T,$$

где T_p — расчетный крутящий момент; T — передаваемый крутящий момент (наибольший из длительно действующих); k — коэффициент, учитывающий реальные условия работы машины.

На основании опытных данных КПД муфт принимают в диапазоне $\eta = 0,985 \dots 0,995$.

Из всего многообразия конструкций муфт далее рассмотрены лишь наиболее распространенные нерасцепляемые муфты.

Фланцевая муфта

Муфта предназначена для соединения соосных цилиндрических валов, состоит из двух полумуфт с фланцами, стягиваемых болтами (см. рис. 4.54).

Фланцевая муфта не может компенсировать смещения концов валов.

Зубчатая муфта

На рис. 4.55 представлена конструкция зубчатой муфты по ГОСТ Р50895–96. Она состоит из двух втулок 1 и 2 с наружными зубьями и обоймы 3 с внутренними зубьями. Зацепление зубьев выполняют эвольвентным с углом профиля $\alpha = 20^\circ$ и коэффициентом высоты $h_a^* = 0,8$.

Зубчатая муфта компенсирует все виды смещений валов за счет боковых зазоров в зацеплении, обработки зубьев втулок по сферам, радиусы которых расположены на осях валов, и выполнения зубьев втулок бочкообразной формы. Допускаемое угловое смещение $\gamma \leq 1,5^\circ$. Зубчатые муфты имеют малые габариты, их применяют для передачи крутящих моментов в диапазоне от 1000 до 63000 Н·м.

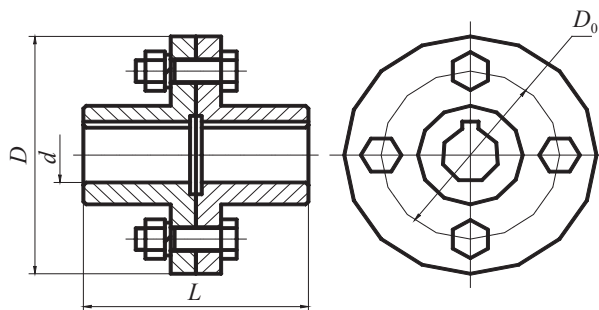


Рис. 4.54

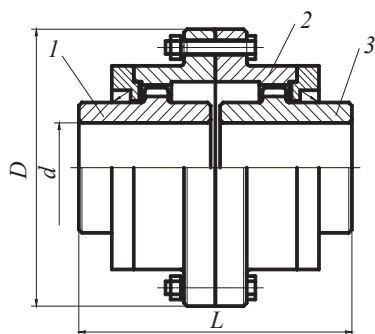


Рис. 4.55

Муфта упругая втулочно-пальцевая

Муфта упругая втулочно-пальцевая (сокращенно МУВП) состоит из двух полумуфт, в одной из которых в конических отверстиях закреплены пальцы с надетыми на них резиновыми втулками (см. рис. 4.56). Втулки помещаются в отверстия, выполненные в другой полумуфте.

Муфты изготавливают различных исполнений: с коническими отверстиями, с цилиндрическими отверстиями, для длинных концов валов, для коротких концов валов.

Муфты МУВП применяют для соединения машин с электродвигателями. Они обладают большой радиальной и угловой жесткостью, поэтому их применение целесообразно при установке соединяемых

узлов на рамах большой жесткости. Наружную поверхность полумуфта можно использовать в качестве тормозного барабана.

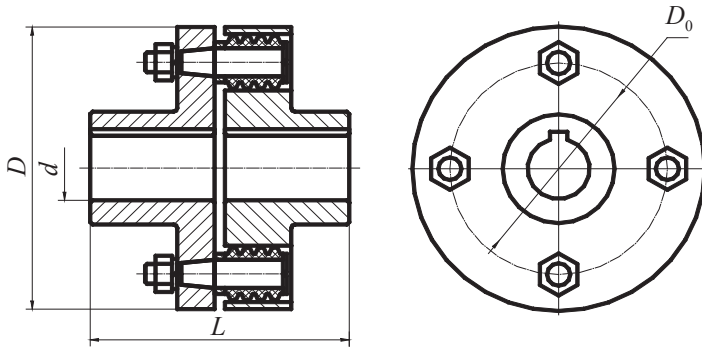


Рис. 4.56

При компенсации смещений на концы валов со стороны муфты действует радиальная сила.

4.9. Точность изготовления деталей

Необходимая надежность машин обеспечивается рядом мероприятий, среди которых важное место занимает выбор целесообразной точности изготовления деталей. Параметры деталей отличаются от расчетных размерами, формой, относительными расположениями поверхностей и т. д. Несмотря на эти отклонения, работа изделий должна удовлетворять эксплуатационным требованиям.

4.9.1. Взаимозаменяемость

Основой серийного и массового производства в машиностроении является взаимозаменяемость деталей и узлов машин.

Взаимозаменяемость — это принцип конструирования, производства и эксплуатации, обеспечивающий возможность качественной сборки (или замены при ремонте) независимо изготовленных сопрягаемых деталей и узлов без предварительного подбора или подгонки по месту.

Взаимозаменяемость обеспечивается Единой системой допусков и посадок ЕСДП (ГОСТ 25346, ГОСТ 25347) и требованиями международной организации по стандартизации ИСО.

Размеры детали

Размеры детали, полученные из расчетов, называются *расчетными*. Их, как правило, округляют по ГОСТ 6636. Эти размеры, указываемые на чертежах, называются *номинальными*. *Действительные* размеры детали, полученные при ее изготовлении, всегда отличаются от номинальных размеров.

Для обеспечения заданного функционального назначения детали ее действительный размер D должен находиться в интервале:

$$P_{\min} \leq D \leq P_{\max},$$

где P_{\min} и P_{\max} — наименьший и наибольший *предельные* размеры.

Разность предельных размеров называется *допуском* T размера:

$$P_{\max} - P_{\min} = T.$$

Поле, ограниченное наибольшим и наименьшим предельными размерами, определяемое величиной допуска и его положением относительно нулевой линии, соответствующей номинальному размеру, называется *полем допуска*.

Квалитеты

Абсолютное значение допуска T данного номинального размера устанавливается выбранным по стандарту квалитетом. Квалитет показывает относительную точность изготовления детали. Две или несколько деталей разных размеров следует считать одинаковой точности (принадлежащими одному квалитету), если их изготавливают на одном и том же оборудовании при одних и тех же условиях обработки (режимах резания и т. д.). Отсюда следует, что точность валов, изготовленных, например, шлифованием, во всем диапазоне диаметров одинакова, несмотря на то, что погрешность обработки, как показали эксперименты, растет с увеличением размера обрабатываемой детали.

Стандартом установлено 20 квалитетов: 01, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 11, 12, ...18. Чем меньше цифра квалитета, тем меньший допуск размера детали.

Самые точные квалитеты (01, 0, 1, 2, 3, 4) применяются при изготовлении образцовых мер и калибров.

Квалитеты с 5-го по 11-й применяются для сопрягаемых элементов деталей. Так, по 6-му и 7-му квалитету выполняются элементы деталей, сопрягаемых с кольцами подшипников качения нормальной точности. Квалитеты 8, 9 и 10 применяют для соединения валов с насаживаемыми на них деталями (зубчатыми колесами, шкивами, муфтами и др.) при малых скоростях и нагрузках.

Квалитеты с 12-го по 18-й применяют для несопряженных элементов деталей.

Посадки

Различные комбинации допусков отверстия и вала дают возможность получить требуемый *характер соединения деталей*, то есть определенную *посадку*.

Рассмотрим сопряжение с зазором (рис. 4.57). Для получения зазора S в сопряжении размер D отверстия втулки должен быть больше размера d вала. Конструктор устанавливает для вала два предельных размера d_{\max} , d_{\min} и два предельных размера для отверстия — D_{\max} , D_{\min} , внутри которых должны находиться действительные размеры сопрягаемых деталей (рис. 4.57, б). Допуски вала и отверстия соответственно равны T_d и T_D .

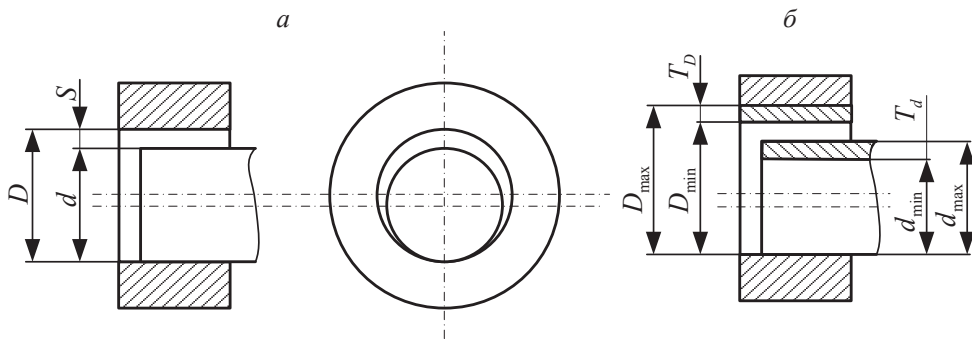


Рис. 4.57

Положение допуска относительно нулевой линии определяется **основным отклонением** — одним из двух предельных отклонений, ближайшим к нулевой линии, и обозначается одной из букв (или их сочетани-

ем) латинского алфавита. Прописные буквы относятся к отверстиям, а строчные — к валам.

Таким образом, поле допуска обозначается сочетанием буквы, указывающей на положение допуска относительно нулевой линии, с цифрой, говорящей о степени точности — величине допуска.

Примеры обозначения на чертеже полей допусков и схемы их построения для отверстия и вала, а также значения отклонений и расчет допусков приведены на рис. 4.58, а, б.

В зависимости от взаимного расположения полей допусков отверстия и вала различают посадки трех типов: с зазором, с натягом и переходные.

На рис. 4.58, в, г, д приведены примеры различных посадок. Указаны формулы для расчета зазоров и натягов в соединениях и амплитуды их колебаний, называемые допуском посадки (TS, TN).

При расчете и выборе посадок конструктора могут интересовать не только предельные зазоры и натяги, но и средние, обычно наиболее вероятные, зазоры и натяги:

$$\text{средний зазор: } S_c = (S_{\max} + S_{\min})/2;$$

$$\text{средний натяг: } N_c = (N_{\max} + N_{\min})/2.$$

Система отверстия и система вала

Получение различных посадок путем одновременного изменения размеров вала и отверстия по сравнению с номинальным размером усложнило бы изготовление деталей. Поэтому один из размеров вала или отверстия принимается за **основной, допуск которого не зависит от типа посадки**. Поле допуска основной детали направлено в тело детали.

Основным отклонением называется одно из двух предельных отклонений (верхнее или нижнее), определяющее положение поля допуска относительно нулевой линии. Основным является отклонение, ближайшее к нулевой линии.

Основные отклонения отверстий обозначаются прописными буквами латинского алфавита, валов — строчными.

Схема расположения основных отклонений с указанием квалитетов, в которых рекомендуется их применять, для размеров до 500 мм приведена в сокращении на рис. 4.59. Затемненная область относится к отверстиям. Цифрой 0 обозначен номинальный размер.

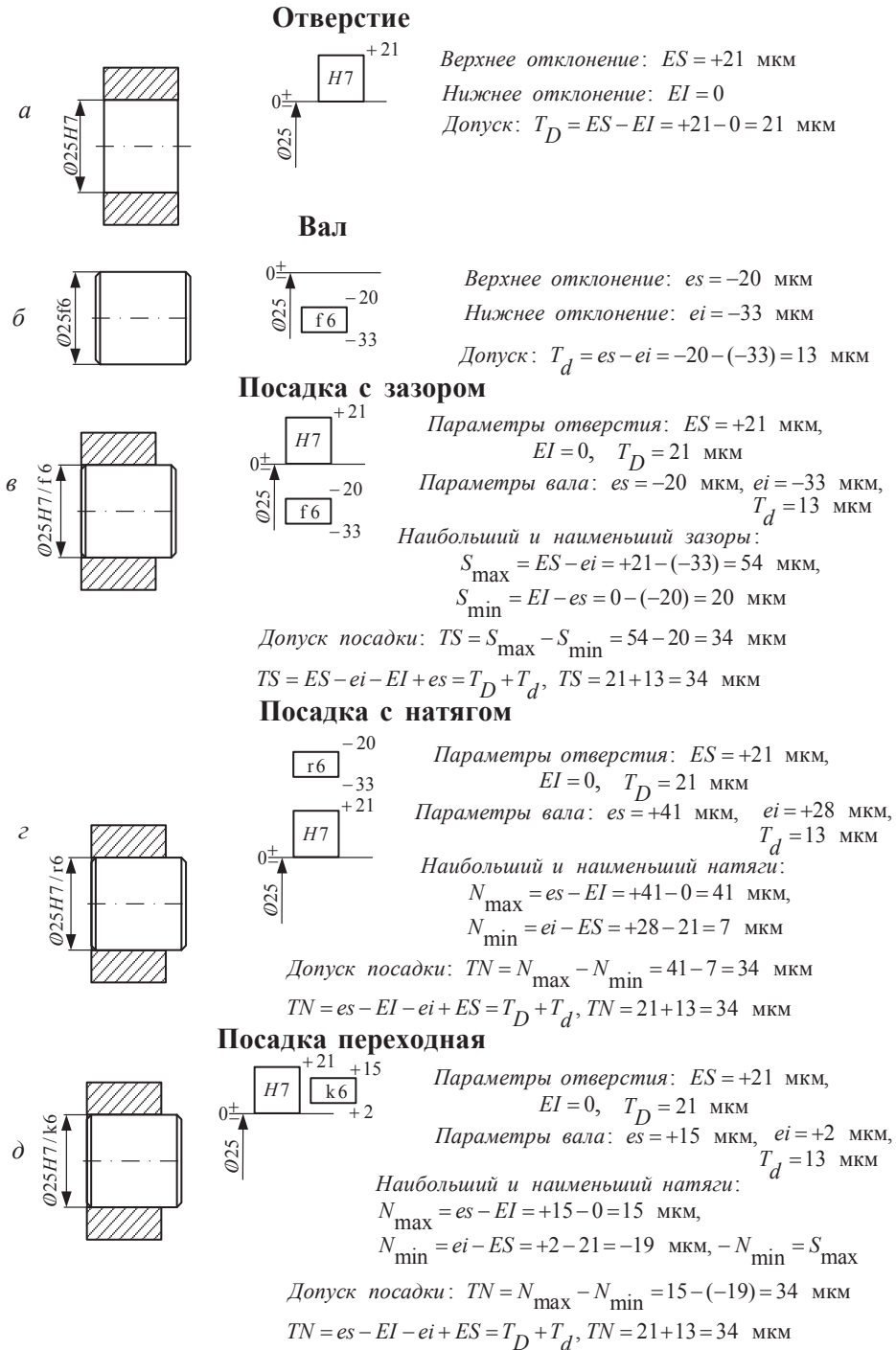


Рис. 4.58

В системе отверстия (СА) основная деталь — отверстие, допуск которого не зависит от посадки и определяется качеством и номинальным размером. Нижний предельный размер отверстия равен номинальному размеру. Верхний предельный размер отверстия больше номинального на величину допуска, установленного заданным качеством. Разные посадки получают путем различного расположения полей допусков вала (рис. 4.59; рис. 4.60, а).

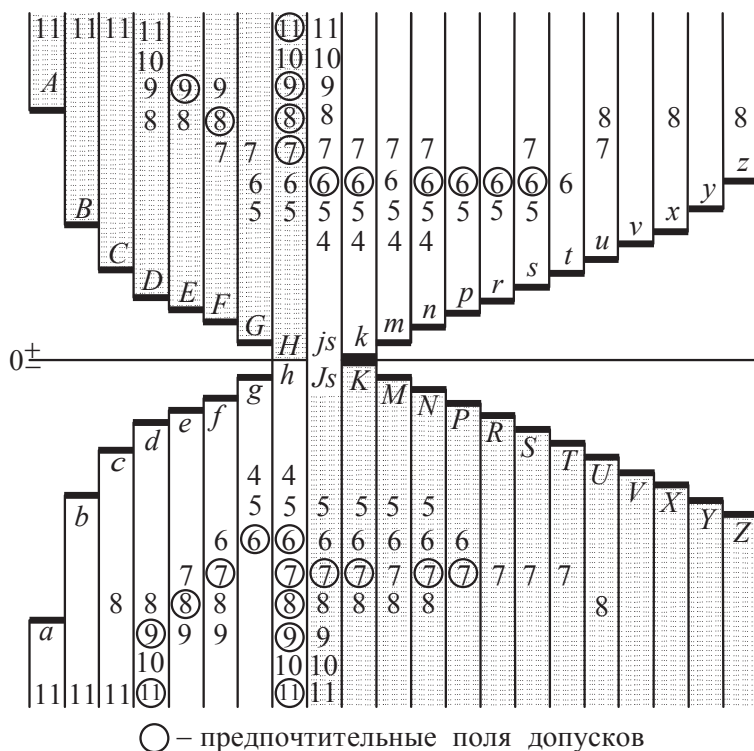


Рис. 4.59

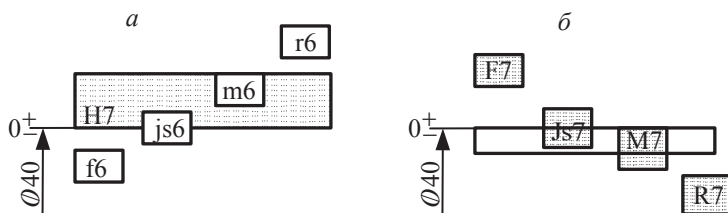


Рис. 4.60

В системе вала (СВ) основная деталь — вал, допуск которого не зависит от посадки и определяется качеством и номинальным размером. Верхний предельный размер вала равен номинальному размеру. Нижний предельный размер вала меньше номинального на величину допуска, установленного заданным качеством. Разные посадки получают путем различного расположения полей допусков отверстия (см. рис. 4.60, б).

В машиностроении в основном применяют систему отверстия (СА), так как изготовить вал с различным расположением поля допуска проще, чем отверстие.

Правила образования посадок

- Посадки должны назначаться либо в системе отверстия, либо в системе вала.
- Применение системы отверстия предпочтительнее.
- Посадки с 4-го по 7-й качества рекомендуется образовывать путем сопряжения отверстия на качество грубее, чем вал.

Нанесение предельных отклонений размеров

Способы нанесения предельных отклонений линейных размеров приведены в табл. 4.17.

При указании предельных отклонений следует руководствоваться следующими правилами.

Предельные отклонения размеров следует указывать непосредственно после номинальных размеров.

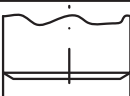

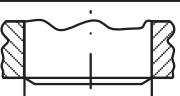
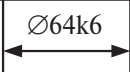
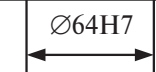
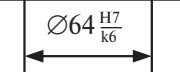
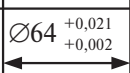
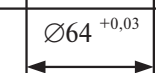
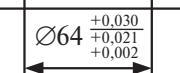
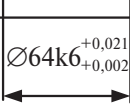
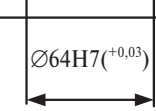
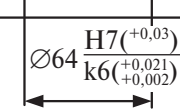
Предельные отклонения линейных и угловых размеров относительно низкой точности допускается не указывать непосредственно после номинальных размеров, а оговаривать общей записью в технических требованиях чертежа. Например, $H14$, $h14$, $\pm IT14/2$ означает — неуказанные предельные отклонения отверстий должны быть выполнены по $H14$, валов — по $h14$, прочие размеры должны иметь симметричные отклонения $\pm IT14/2$.

При указании предельных отклонений предпочтение следует отдавать условному обозначению полей допусков.

Предельные отклонения угловых размеров указывают только числовыми значениями.

Таблица 4.18

Способы нанесения предельных отклонений линейных размеров на чертежах

Способ указания на чертежах предельных отклонений			
1. Условное обозначение полей допусков			
2. Указание числовых значений предельных отклонений			
3. Условное обозначение полей допусков с указанием их числовых значений			

4.10. Шероховатость поверхности

Неровности поверхности детали, если отношение шага микронеровностей к их высоте меньше 50, называются шероховатостью поверхности. Шероховатость поверхности деталей существенно влияет на работоспособность механизмов и машин. Уменьшение шероховатости поверхностей сопрягаемых деталей снижает потери на трение, повышает износостойкость и долговечность.

Главными параметрами шероховатости поверхности являются: **среднее арифметическое R_a** абсолютных значений отклонения профиля от его средней линии в пределах базовой длины l ; высота шероховатостей R_z по десяти точкам (сумма средних арифметических абсолютных отклонений пяти высших и пяти низших точек в пределах длины l). В первом приближении считается, что значение параметра шероховатости R_z должно удовлетворять условию $R_z \leq (0,1 \dots 0,25) \cdot T$, где T — допуск на размер. Рекомендуемые шероховатости поверхностей деталей машин представлены в табл. 4.19.

Для обозначения шероховатости поверхностей на рабочих чертежах деталей применяют знаки, показанные на рис. 4.61. Если не требуется устанавливать вид обработки, то применяют знак по рис. 4.61, *a*. Этот способ обозначения является предпочтительным. Если требуется, чтобы поверхность была образована обязательно удалением слоя материала (шлифование, полирование и т. д.), применяют знак, показанный

на рис. 4.61, б. Для обозначения шероховатости поверхностей, не обрабатываемых по данному чертежу, применяют знак по рис. 4.61, в. При использовании знаков по рис. 4.61, а и рис. 4.61, б под знаком шероховатости размещают обозначение параметра шероховатости и его числовое значение (рис. 4.62).

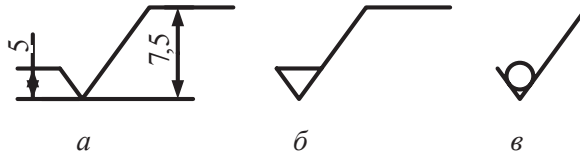


Рис. 4.61

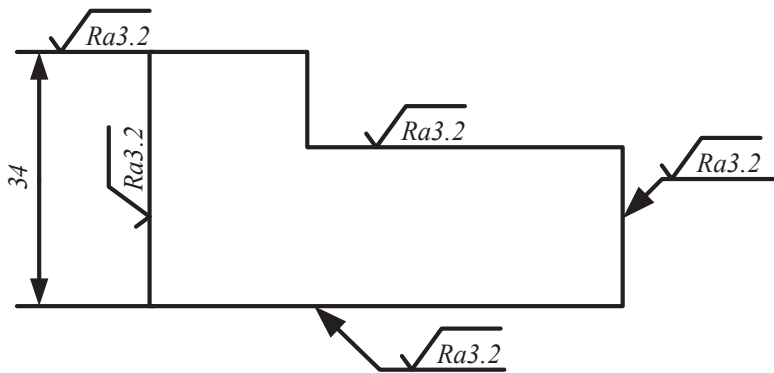


Рис. 4.62

Если поверхность, на которую ставится знак шероховатости, расположена сверху или слева, то знак шероховатости можно размещать непосредственно на этой поверхности, либо на ее продолжении, а при недостатке места допускается размещать знаки шероховатости на выносных линиях размеров, по возможности ближе к размерным линиям.

Таблица 4.19

Шероховатость Ra для поверхностей деталей

Вид поверхности	Ra , мкм
Посадочные поверхности валов и корпусов под подшипники качения класса точности 0:	
d или D до 80 мм	1,25
d или $D > 80$ мм	2,5
Торцы заплечиков валов для базирования:	
подшипников качения класса точности 0	1,6
зубчатых и червячных колес	3,2

Окончание табл. 4.19

Вид поверхности	Ra , мкм
Поверхности валов под резиновые манжеты	0,4...0,63
Поверхности валов для соединений с натягом	0,8
Поверхности отверстий ступиц для соединений с натягом	1,6
Поверхности шпоночных пазов на валах:	
рабочие	3,2
нерабочие	6,3
Поверхности шпоночных пазов в отверстиях зубчатых колес, шкивов, звездочек:	
рабочие	1,6...3,2
нерабочие	3,2...6,3
Торцы ступиц зубчатых колес	1,6...3,2
Профили зубьев зубчатых колес 8 степени точности	1,6
Поверхности выступов зубьев колес	6,3
Свободные торцовые поверхности зубчатых колес	6,3
Канавки, фаски, радиусы галтелей	6,3
Поверхности отверстий под болты, винты, шпильки	12,5
Опорные поверхности под гайки, головки болтов, винтов	6,3

Для поверхностей, расположенных справа или внизу, знак шероховатости размещается на полках линий-выносок (см. рис. 4.62). При указании одинаковой шероховатости для части поверхностей изделия в правом верхнем углу чертежа помещают обозначение одинаковой шероховатости и знак, заключенный в скобки (рис. 4.63).

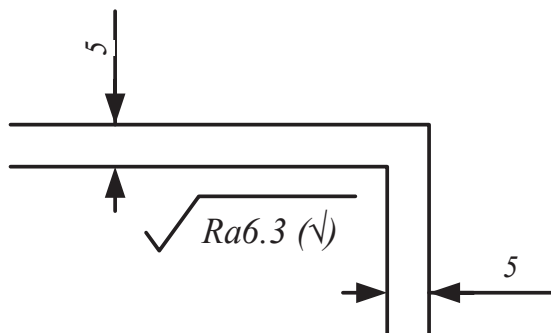


Рис. 4.63

Это означает, что все поверхности, на которые не нанесены обозначения шероховатости, должны иметь шероховатость, указанную перед знаком в скобках.

Список литературы

1. Троицкий И. В. Теоретическая механика: учебное пособие / И. В. Троицкий, В. М. Зиомковский. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2009. 55 с.
2. Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник для немашиност. спец. вузов / П. А. Степин. 8-е изд. М.: Высш. шк., 1988. 367 с.
3. Теория механизмов и машин: учебное пособие / А. Г. Черненко, И. В. Троицкий, Ю. В. Песин, Э. А. Бубнов. Екатеринбург: УрФУ, 2010. 211 с.
4. Иванов М. Н. Детали машин / М. Н. Иванов, В. А. Финогенов. М.: Высш. школа, 2003. 408 с.
5. Пример расчета цилиндрической зубчатой передачи: методические указания по курсам «Детали машин» и «Механика» / Л. П. Вязкова [и др.]. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2002. 12 с.
6. Шейнблит А. Е. Курсовое проектирование деталей машин / А. Е. Шейнблит. М.: Янтарный сказ, 2004. 455 с.
7. Дунаев П. Ф. Конструирование узлов и деталей машин / П. Ф. Дунаев. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 496 с.
8. Баранов Г. Л. Расчет зубчатых цилиндрических передач / Г. Л. Баранов. Екатеринбург: УГТУ, 2005. 31 с.
9. Баранов Г. Л. Расчет ременных и цепных передач / Г. Л. Баранов. Екатеринбург: УГТУ, 2005. 29 с.
10. Баранов Г. Л. Расчет валов, подшипников и муфт / Г. Л. Баранов. Екатеринбург: УГТУ, 2005. 46 с.
11. Баранов Г. Л. Расчет соединений / Г. Л. Баранов. Екатеринбург: УГТУ, 2005. 45 с.

Учебное издание

Зиомковский Владислав Мечиславович
Троицкий Игорь Витальевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Редактор Н. П. Кубыщенко
Верстка О. П. Игнатевой

Подписано в печать 02.09.2015. Формат $70 \times 100 \frac{1}{16}$.
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 13,5. Усл. печ. л. 23,2. Тираж 120 экз.
Заказ 238

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41.
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс: 8(343) 358-93-06.
E-mail: press-urfu@mail.ru

